الأدهم
فى
الإستاتيكا
عام وأزهر
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم

الوحدة الأولى
الاحتكاك

① قوة الاحتكاك السكونى (ح)
هى قوة تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وتكون فى عكس اتجاه الحركة

② قوة الاحتكاك السكونى النهائى (ح س)
هى القيمة العظمى لقوة الاحتكاك وتظهر عندما يكون الجسم على وشك الحركة ويكون

ح س = م س ر

الاحتكاك النهائى السكونى ← ح س ، معامل الاحتكاك ← م س ، رد الفعل العمودى ← ر

③ ح ∈ [٠ ، ح س]

④ ح ∈ [٠ ، م س ر]

رد الفعل المحصل $\bar{ر} = ر \sqrt{1 + م_س^2}$

$\bar{ر} = ر$ قا ل

حيث ل زاوية الاحتكاك

⑤ زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل

⑥ معامل الاحتكاك تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين

ركز فى التفاصيل اللى جايين

ⓐ إذا كانت الزاوية بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى هـ فإن م س = ظا هـ

ⓑ إذا كانت الزاوية بين رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك النهائى هـ فإن م س = ظتا هـ

⑦ $م_س = \frac{ح_س}{ر} = \frac{\text{قوة الاحتكاك السكونى النهائى}}{\text{رد الفعل العمودى}}$

⑧ م س = ظا ل حيث ل زاوية الاحتكاك

⑨ م س > م ك
السكونى ، الحركى

⑩ ح س > ح ك

فى مسائل المستوى المائل

ⓐ إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق متأثراً بوزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك (ل) = قياس زاوية ميل المستوى (هـ)

← ل = هـ ، م س = ظا ل = ظا هـ

ب) إذا كان هـ = ل فإن الجسم يستقر على المستوى [احتكاك نهائي]

جـ) إذا كان هـ > ل فإن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط [يحدث انزلاق]

ركز في نقطة الاختيار دي

وضع جسم على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ وكانت زاوية الاحتكاك ل فإن الجسم يظل متزن إذا وفقط إذا كان .....

أ) هـ > ل ب) هـ < ل

جـ) هـ ≤ ل د) هـ = ل

التفسير

لأن هـ < ل مستقر

هـ = ل على وشك الانزلاق لكنه لم ينزلق بعد [لسه مستقر]

∴ هـ ≤ ل

عند التأثير بقوة على جسم موضوع على مستوى خشن **مائل** فإن

$ق_1$ أقل قوة وهي التي تجعله على وشك الحركة لأسفل

$ق_2$ أكبر قوة وهي التي تجعله على وشك الحركة لأعلى

مسائل على الاحتكاك

(١) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينهما $\frac{1}{4}$ أوجد

أ) القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة

ب) القوة التي تميل على المستوى ٣٠° وتجعله على وشك الحركة

الحل

أ)

∵ ر = ٢٠ نيوتن

ح س = م س ر = $\frac{1}{4}$ × ٢٠ = ٥ نيوتن

∴ ق = ح س = ٥ نيوتن

ب)

ق جتا ٣٠ = م س ر

ق $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{4}$ ر

∴ ر = ٢ $\sqrt{3}$ ق ← (١)

∵ $ر + ق جا ٣٠ = ٢٠$

$ر + \frac{١}{٢} ق = ٢٠$ ← (٢)

من (١) في (٢)

$٢\sqrt{٣} ق + \frac{١}{٢} ق = ٢٠$

$ق (٢\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}) = ٢٠$

∴ ق = ٥ نيوتن

---

(٢) وضع جسم وزنه (و) ث.كجم على مستوى أفقي خشن قياس زاوية الاحتكاك "ل" شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقي زاوية (٢ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة. اثبت أن مقدار هذه القوة = و ظا ل

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ح س = م س ر = ر ظا ل

ر + ق جا ٢ل = و

∴ ر = و − ق جا ٢ل ← (١)

∵ م س ر = ق جتا ٢ل ← (٢)

ظا ل (و − ق جا ٢ل) = ق جتا ٢ل

و ظا ل − ظا ل × ق × ٢ جا ل جتا ل = ق جتا ٢ل

و ظا ل − $\frac{جا ل}{جتا ل}$ × ق × ٢ جا ل جتا ل = ق جتا ٢ل

و ظا ل − ٢ جا² ل ق = ق جتا ٢ل

و ظا ل = ق جتا ٢ل + ٢ق جا² ل

و ظا ل = ق [جتا ٢ل + ٢ جا² ل]

و ظا ل = ق [١ − ٢ جا² ل + ٢ جا² ل]

∴ ق = و ظا ل #

تذكر أن

جا ٢ل = ٢ جا ل جتا ل

جتا ٢ل = جتا² ل − جا² ل

= ٢ جتا² ل − ١

= ١ − ٢ جا² ل

٣) وضعت كتلة وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة أفقية ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة.

أ) إذا كانت ق = ٨ أوجد معامل الاحتكاك السكوني

ب) وإذا كان م س = ٠,٤ أوجد ق

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة ∴ ر = ٣٢

أ) ر = ٣٢

ق = ٨

ق = م س ر

٨ = م س × ٣٢

م س = ٨ / ٣٢ = ١ / ٤ أو ¼

ب) في الحالة الثانية ق مجهولة ، م س = ٠,٤

وكذلك ق = م س ر

ق = ٠,٤ × ٣٢ = ١٢,٨ نيوتن

٤) وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقي وربط بخيط أفقي يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من الطرف الآخر ثقل قدره ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزناً على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني ١/٣ . فهل يكون الجسم على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك.

الحل

∵ الجسم متزن

∴ ر = ١٢

، ح = ش = ٤

، ∵ م س = ١ / ٣

∴ م س ر = ١/٣ × ١٢ = ٤

∵ ح = م س ر

∴ الجسم على وشك الحركة

٥) يرتكز جسم كتلته ٧٥ جم على مستوٍ أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = ١/√٣ أثرت على الجسم قوتان أفقيتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فكان الجسم على وشك الحركة. أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة

تذكر محصلة قوتين

ح = √(ق١² + ق٢² + ٢ ق١ ق٢ جتا ي)

ومحصلة قوتين متساويتين

ح = ٢ق جتا ي/٢

ح = ٢ق × جتا ١٢٠/٢

∴ ح = ق

∴ ح = م س ر

ق = ⅓ ر ⟵ (١)

، ∵ ر = ٧٥

∴ ق = ⅓ × ٧٥ = ٢٥ ث.جم

∴ مقدار كل من القوتين = ٢٥ ث.جم

٦ فى الشكل المقابل

مقدار أقل قوة أفقية لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{1}{5}$ هو .... ث.كجم

الحل

الجسم يتزن إذا منع من الانزلاق لاسفل لو محتاج أقل قوة يعنى تجعله على وشك الحركة لاسفل ويكون الاحتكاك لاعلى

م س ر = و

$\frac{1}{5}$ ر = ١٥

∴ ر = ٧٥ ث.كجم

، ر = ق ∴ ق = ٧٥ ث.كجم

٧ إذا كان الوزن ٦ نيوتن

م س = $\frac{1}{3}$

فإن قوة الاحتكاك السكونى ∋ ....

افقى

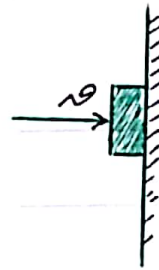
(أ)]٠، ٢[(ب) [٠، ٢] (ج)]٠، ٢] (د) [٠، ٢[

ر = ٦ م س ر = ⅓ × ٦ = ٢

ح ∋ [٠، م س ر] ∋ [٠، ٢]

ثانياً مسائل المستوى المائل

١ وضع جسم وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن ولوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان زاوية ميل المستوى ٣٠° فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار

(أ) أقل قوة تمنع الجسم من الانزلاق وتؤثر بإتجاه المستوى

(ب) أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتمنعه من الانزلاق

الحل

∵ الجسم كان على وشك الانزلاق عندما

هـ = ٣٠° ∴ م س = ظا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(أ) لاحظ لا نجد أى قوة فهى التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل وبالتالى الاحتكاك لأعلى

ر = ٣٠ جتا ٦٠°

∴ ر = ١٥ ثقل كجم ← (١)

ق + م س ر = ٣٠ جا ٦٠ ← (٢)

ق + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ = ١٥$\sqrt{3}$

ق = ١٥$\sqrt{3}$ − $\frac{15}{\sqrt{3}}$ = ١٠$\sqrt{3}$ ثقل كجم

(ب) لإيجاد أكبر قوة

ر = ٣٠ جتا ٦٠°

∴ ر = ١٥ ثقل كجم ← (١)

ق = م س ر + ٣٠ جا ٦٠°

ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ + ١٥$\sqrt{3}$

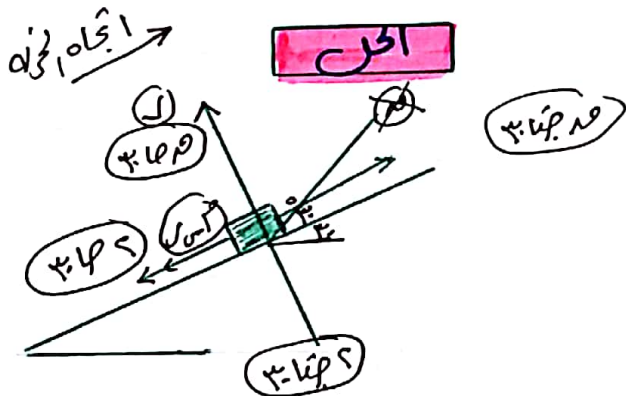
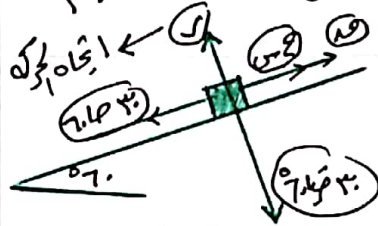
∴ ق = ٢٠$\sqrt{3}$ ثقل كجم

(٢) وضع جسم وزنه ٢ ث. كجم على مستوٍ أفقى خشن ثم أميل المستوى تدريجياً حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق أسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى وإذا ربط الجسم بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية ٦٠° على الأفقى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة لأعلى أوجد

(أ) مقدار قوة الشد

(ب) مقدار قوة الاحتكاك

الحل

* م س = ظا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

لاحظ أن القوة تميل على الأفقى بـ ٦٠° لذلك فهى تميل على المستوى لأعلى ٣٠° لأن المستوى مائل على الأفقى ٣٠ مفهوم؟

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى ∴ الاحتكاك لأسفل

ق جتا ٣٠° = م$_س$ ر + ٢ جا ٣٠°

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر + ١ ← (١)

∵ ر + ق جا ٣٠° = ٢ جتا ٣٠°

ر + $\frac{1}{2}$ ق = $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق ← (٢)

من (٢) فى (١)

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق) + ١

بالضرب × $\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}$ ق = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق + $\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق = ٢ $\sqrt{3}$

٢ ق = ٢ $\sqrt{3}$

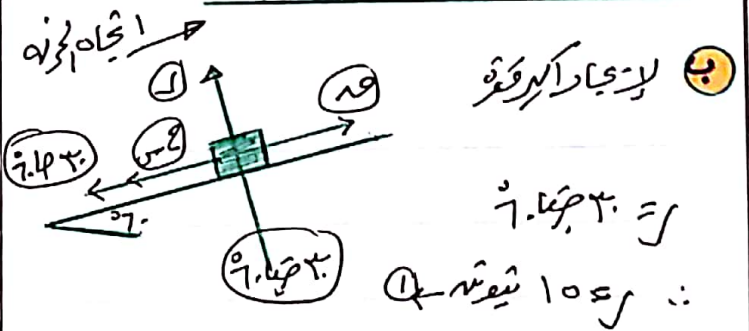
∴ ق = $\sqrt{3}$ ث.كجم

فى (٢) ←

∴ ر = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث.كجم

∴ قوة الاحتكاك السكونى

ع$_س$ = م$_س$ ر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ث.كجم

٣

جسم وزنه ٣٨ ث.كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد لأعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ وتقع فى مستوى رأسى يجعله على وشك الحركة أوجد مقدار هذه القوة ورد الفعل العمودى

الحل

ر + ق جا هـ — م$_س$ ر — ق — ق جتا هـ — ٣٨

من أخذ من المستوى المائل انه الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط ∴ م$_س$ = ظا هـ = $\frac{1}{4}$

ونكمل المستوى الأفقى

∵ الجسم على وشك الحركة

(مثلث أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ والزاوية هـ)

جا هـ = $\frac{3}{5}$

جتا هـ = $\frac{4}{5}$

∴ ق جتا هـ = م$_س$ ر

$\frac{4}{5}$ ق = $\frac{1}{4}$ ر

∴ ر = $\frac{16}{5}$ ق ← (١)

∵ ر + ق جا هـ = ٣٨

$\frac{16}{5}$ ق + $\frac{3}{5}$ ق = ٣٨

$\frac{19}{5}$ ق = ٣٨

∴ ق = $\frac{38 \times 5}{19}$ = ١٠ ث.كجم

∴ ر = ٣٢ ث.كجم

٤) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى، فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى هو $\frac{١}{٢}$، فأوجد مقدار وزن الجسم (و).

الحل

وشك الحركة

ر، ٢٢ جتاهـ، وجاهـ، م س ر، ٢٢، ٢٢ جاهـ، وجتاهـ

١٣، ٥، ١٢

جاهـ = $\frac{٥}{١٣}$

جتاهـ = $\frac{١٢}{١٣}$

ظاهـ = $\frac{٥}{١٢}$

م س = $\frac{١}{٢}$

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى ∴ الاحتكاك لأسفل

∴ ر = ٢٢ جاهـ + وجتاهـ

∴ ر = ٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$ + و × $\frac{١٢}{١٣}$ ← ①

، ٢٢ جتاهـ = م س ر + وجاهـ ← ②

بالتعويض من ① عن قيمة ر

٢٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ و) + $\frac{٥}{١٣}$ و

(بالضرب × ١٣)

٢٢ × ١٢ = $\frac{١}{٢}$ (٢٢ × ٥ + ١٢ و) + ٥ و

٢٦٤ = ٥٥ + ٦ و + ٥ و

٢٦٤ − ٥٥ = ١١ و

∴ و = $\frac{٢٠٩}{١١}$ = ١٩ نيوتن.

---

٥) في الشكل ده إذا كان الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى

١٠، ٦

فإن معامل الاحتكاك السكوني = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

∵ الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط

١٠، ٦، ٨

∴ م س = ظاهـ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

---

٦) وضع جسم مقدار وزنه و على مستوٍ خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فوجد أنه على وشك الانزلاق. أثبت أن القوة التي توازي خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى = ٢ وجاهـ

وأثبت أيضاً أن ر = و (ر = رد الفعل المحصل)

الحل

م س = ظاهـ = $\frac{جاهـ}{جتاهـ}$

، ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

المعادلات

① $ق = م_س ر + و جا هـ$

، ② $ر = و جتا هـ$

بالتعويض في ①

∴ $ق = \frac{جا هـ}{جتا هـ} \times و جتا هـ + و جا هـ$

∴ $ق = ٢ و جا هـ$ # أولاً

∵ $رَ = ر قا ل = ر قا هـ$

$= و جتا هـ \times \frac{1}{جتا هـ} = و$ # ثانياً

---

٧ كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوى والجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً . ثم اثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة $\frac{٣}{٤}$

الحل

الجسم ذو معامل احتكاك اصغر يوضع أسفل (لابد حركته لأسفل)
والجسم ذو معامل احتكاك اكبر يوضع أعلى
حتى يتحرك الجسمان معاً والخيط مشدود

$م_1 = \frac{٢}{٣}$

$م_2 = \frac{٤}{٥}$

لاحظ الجسمان هنا على وشك الحركة لاسفل
لابد مفيش قوة شد تسحب لأعلى يبقى هينزلوا لأسفل
ويكون الاحتكاك لأعلى [عكس الحركة]

* بالنسبة للجسم ٣ ث.كجم الأول

$ر_1 = ٣ جتا هـ$

$ش + \frac{٢}{٣} ر_1 = ٣ جا هـ$

$ش = ٣ جا هـ - \frac{٢}{٣} \times ٣ جتا هـ$

$ش = ٣ جا هـ - ٢ جتا هـ$ ← ①

* بالنسبة للجسم ٥ ث.كجم الثاني

$ر_2 = ٥ جتا هـ$

$ش + ٥ جا هـ = \frac{٤}{٥} ر_2$

$ش = \frac{٤}{٥} \times ٥ جتا هـ - ٥ جا هـ$

$ش = ٤ جتا هـ - ٥ جا هـ$ ← ②

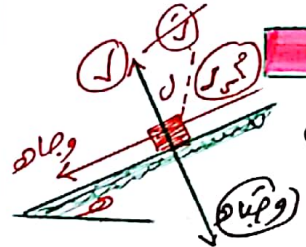
من ① ، ② ش = ش

∴ $٣ جا هـ - ٢ جتا هـ = ٤ جتا هـ - ٥ جا هـ$

$٣ جا هـ + ٥ جا هـ = ٤ جتا هـ + ٢ جتا هـ$

$٨ جا هـ = ٦ جتا هـ$

$\frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{٦}{٨}$ ∴ $ظا هـ = \frac{٣}{٤}$ #

(٨) برهن أن: إذا وضع الجسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي.

الحل

ر ، $م_س$ ر ، ل ، و جاهـ ، و جتاهـ ، هـ

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل ∴ الاحتكاك لأعلى

∴ ر = و جتاهـ ← (١)

$م_س$ ر = و جاهـ ← (٢)

من (١) في (٢)

$م_س$ × و جتاهـ = و جاهـ

$م_س = \frac{جاهـ}{جتاهـ}$ = ظاهـ

ولكن $م_س$ = ظال حيث ل زاوية الاحتكاك

∴ ظاهـ = ظال

∴ زاوية ميل المستوى = زاوية الاحتكاك #

---

(٩) وضع جسم وزنه $٦٦\frac{٢}{٣}$ نيوتن على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك بينهما $=\frac{٣}{٤}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقي بزاوية حادة قياسها θ فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قياس θ

الحل

ر ، ٤٠ ، ٤٠ جاθ ، ٤٠ جتاθ ، $\frac{٣}{٤}$ ر ، θ ، $٦٦\frac{٢}{٣}$

معادلات الاتزان:

٤٠ جتاθ $=\frac{٣}{٤}$ ر ← (١)

ر + ٤٠ جاθ $= ٦٦\frac{٢}{٣}$

٤٠ جاθ $=\frac{٢٠٠}{٣}$ − ر ← (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

$(٤٠ جتاθ)^٢ + (٤٠ جاθ)^٢ = (\frac{٣}{٤} ر)^٢ + (\frac{٢٠٠}{٣} - ر)^٢$

∴ $١٦٠٠ (جا^٢θ + جتا^٢θ) = \frac{٩}{١٦} ر^٢ + \frac{٤٠٠٠٠}{٩} - \frac{٤٠٠}{٣} ر + ر^٢$

$\frac{٢٥}{١٦} ر^٢ - \frac{٤٠٠}{٣} ر + \frac{٤٠٠٠٠}{٩} - ١٦٠٠ = ٠$

$\frac{٢٥}{١٦} ر^٢ - \frac{٤٠٠}{٣} ر + \frac{٢٥٦٠٠}{٩} = ٠$

بحل المعادلتين بالآلة طبعاً

∴ $ر = \frac{١٢٨}{٣}$

وبالتعويض في (١) ∴ جتاθ $= (\frac{٣}{٤} ر) ÷ ٤٠$

∴ جتاθ $= \frac{٣}{١٦٠} × \frac{١٢٨}{٣}$

∴ θ ≃ ٣٦° ٥٢′

---

(١٠) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها θ فإذا كان أقل وأكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتجعل الجسم متزناً على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب أوجد $م_س$ ، θ

الحل

وشك الحركة ، ر ، $م_س$ ر ، ١٠ ، ٥٠ جاθ ، ٥٠ جتاθ

أولاً: أقل قوة هي التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل

ر = ٥٠ جتاθ

١٠ + $م_س$ ر = ٥٠ جاθ

١٠ + $م_س$ × ٥٠ جتاθ = ٥٠ جاθ

$\therefore$ م س = (٥٠ جا θ − ١٠) / (٥٠ جتا θ) ← ①

ثانياً: أكبر قوة هي التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

ر = ٥٠ جتا θ

، ق = م س ر + ٥٠ جا θ

٤٠ = م س × ٥٠ جتا θ + ٥٠ جا θ

م س = (٤٠ − ٥٠ جا θ) / (٥٠ جتا θ) ← ②

بمساواة ①، ②

$\therefore$ المقام = المقام $\therefore$ البسط = البسط

٥٠ جا θ − ١٠ = ٤٠ − ٥٠ جا θ

٥٠ جا θ + ٥٠ جا θ = ٤٠ + ١٠

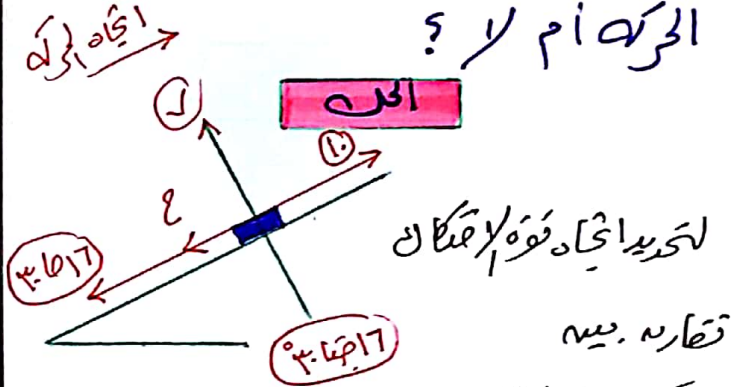
١٠٠ جا θ = ٥٠

$\therefore$ جا θ = ١/٢

$\therefore$ θ = ٣٠°

$\therefore$ م س = (٤٠ − ٥٠ جا ٣٠) / (٥٠ جتا ٣٠) = √٣ / ٥

(١١) وضع جسم وزنه ١٦ ث.كجم على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم = ١/√٣ اثرت على الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى مقدارها ١٠ ث.كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا؟

الحل

لتحديد اتجاه قوة الاحتكاك

نقارن بين

١٠ ، ١٦ جا ٣٠

$\because$ ١٠ > ١٦ جا ٣٠ $\therefore$ الحركة لأعلى

$\therefore$ قوة الاحتكاك لأسفل

$\because$ الجسم متزن

$\therefore$ ١٠ = ع + ١٦ جا ٣٠

١٠ = ع + ٨

$\therefore$ ع = ٢ ث.كجم

لتحديد إذا كان على وشك الحركة أم لا

م س = ١/√٣ ، ر = ٨√٣

$\therefore$ م س ر = ١/√٣ × ٨√٣ = ٨ ث.كجم

$\therefore$ ع < م س ر

$\therefore$ الجسم لا يكون على وشك الحركة

ولو مش مصدقني اسأل

الوحدة الثانية
العزوم

١ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تؤثر في نقطة أ

فإن عزمها حول و $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{وأ} \times \overrightarrow{ق}$

حول ب $\overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{بأ} \times \overrightarrow{ق}$

$\overrightarrow{ج_جـ} = \overrightarrow{جـأ} \times \overrightarrow{ق}$

٢ $\overrightarrow{ج} = (\text{نقطة التأثير} - \text{مركز العزوم}) \times \overrightarrow{ق}$

٣ $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (\text{ر ق جا هـ})\ \overrightarrow{ى}$

٤ وحدة العزم = قوة × مسافة

٥ لإيجاد طول العمود الساقط = $\dfrac{\|\overrightarrow{ج_و}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$

٦ ج = ق ل   مقدار

٧ الإشارة   مع عقارب الساعة   −

عكس عقارب الساعة   +

أ $\overrightarrow{ج_و}$ متجه العزم

ب $ج_و$ القياس الجبري [+ أو −]

جـ $\|\overrightarrow{ج_و}\|$ هو كمية موجبة دائماً [معيار متجه العزم]

٨ عزم قوة حول نقطة في الفراغ.

$$\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_س & ق_ص & ق_ع \end{vmatrix}$$

$(ص\,ق_ع - ع\,ق_ص)\ \hat{س}$ مركبة العزم في اتجاه $\hat{س}$

$+\ (ع\,ق_س - س\,ق_ع)\ \hat{ص}$ مركبة العزم $\hat{ص}$

$+\ (س\,ق_ص - ص\,ق_س)\ \hat{ع}$ // $\hat{ع}$

٩ ينعدم عزم قوة حول محور إذا

أ اشترك خط عمل القوة مع المحور في نقطة على الأقل

ب إذا كانت القوة توازي المحور

١٠ عزم قوة بالنسبة لأي نقطة على خط عملها = ٠

١١ إذا كان $\overrightarrow{ج_أ} = \overrightarrow{ج_ب}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$

١٢ إذا كان $\overrightarrow{ج_أ} = -\overrightarrow{ج_ب}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$

١٣ متجه الوحدة في اتجاه أ $\Leftarrow \overrightarrow{أ^*} = \dfrac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

ومنها $\overrightarrow{أ}$ = متجه وحدة × معياره

(١٤) مجموع عزوم عدة قوى بالنسبة لأى نقطة
= عزم المحصلة حول نفس النقطة

(١٥) ينعدم مجموع عزوم القوى حول نقطة إذا
(أ) المجموعة متزنة
(ب) هذه النقطة تقع على خط عمل القوة المحصلة.

لاحظ فى مسائل المسوحات

(١٦) العزم = القوة × الذراع العمودى

(١٧) إذا لم تستطيع ايجاد بعد عمودى حلل القوة فى اتجاهين متعامدين
وتضرب كل مركبة فى البعد العمودى عليها
وتستخدم قاعدة الإشارات

ملاحظات للأشكال الهندسية

(١) الوتر = طول الضلع $\sqrt{2}$ فى المثلث القائم المتساوى الساقين

(٢) المثلث القائم الثلاثينى ستينى

١ : $\sqrt{3}$: ٢ ← الوتر

(٣) السداسى المنتظم

قياس كل زاوية ١٢٠°

ب هـ = ٢ل

(٤)

$$أء = \frac{أب \times أجـ}{ب جـ}$$

المسائل

(١) إذا كانت $\vec{ق} = \vec{س} - ٢\vec{ص}$ تؤثر فى أ (٢ ، ٣) . أوجد
(أ) عزم $\vec{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١) .
(ب) طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة .

الحل

(أ) $\vec{جـ}_ب = \vec{ب أ} \times \vec{ق}$
$= (\vec{أ} - \vec{ب}) \times \vec{ق}$
$= [(٢ ، ٣) - (٢ ، ١)] \times (١ ، -٢)$
$= (٠ ، ٢) \times (١ ، -٢)$
$= ٠ - ٢ = -٢ \vec{ع}$

(ب) $ل = \frac{\|\vec{جـ}_ب\|}{\|\vec{ق}\|} = \frac{٢}{\sqrt{١+٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

٢ تؤثر القوة $\overline{ق}$ في النقطة أ(-٣ ، ٢) فإذا كان عزم $\overline{ق}$ حول كل من النقطتين ب(٣ ، ١) ، جـ(-١ ، ٤) يساوي ٢٨ $\overline{ع}$ اوجد $\overline{ق}$

الحل

∵ $\overline{ج}_{ب} = \overline{ج}_{جـ} = 28\,\overline{ع}$

$\overline{ب أ} \times \overline{ق} = \overline{جـ أ} \times \overline{ق} = 28\,\overline{ع}$

$\overline{ب أ} = (-6 ، 1)$

$\overline{جـ أ} = (-2 ، -2)$

نفرض أن $\overline{ق} = (س ، ص)$

$\overline{ج}_{ب} = (-6 ، 1) \times (س ، ص)$

∴ $-6ص - س = 28$ ← ①

$\overline{ج}_{جـ} = (-2 ، -2) \times (س ، ص)$

$-2ص + 2س = 28$ ← ②

$-12ص - 2س = 56$

$-14ص = 84$

∴ $ص = -6$

$36 - س = 28$

$36 - 28 = س$

∴ $س = 8$

∴ $\overline{ق} = (8 ، -6)$

٣ تؤثر القوى $\overline{ق}_1 = \overline{س} + 2\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_2 = 3\overline{س} - \overline{ص}$ في أ(-٢ ، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب جـ}$ حيث ب(-١ ، ٥) ، جـ(١ ، ٢)

الحل

هنجيب العزم حول منتصف ب جـ ومفروض يكون صفر.

$م = \left(\frac{-1+1}{2} ، \frac{5+2}{2}\right) = (0 ، 3.5)$

$\overline{ج}_{م} = \overline{م أ} \times \overline{ق}$

$= [(-2 ، 3) - (0 ، 3.5)] \times (4 ، 1)$

$= (-2 ، -0.5) \times (4 ، 1)$

$= -2 + 0.5 \times 4 = \overline{0}$

∴ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب جـ}$ #

وفيه طريقة ثانية للحل

$\overline{ج}_{ب} = \ldots$

$\overline{ج}_{جـ} = \ldots$

هنلاقيهم متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة.

∴ خط عمل ق ينصف ب جـ

حاول تحلها

٤ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥ ، م ثيوتن فى اتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ على الترتيب. أوجد مجموع عزوم القوى :

(أ) بالنسبة للنقطة أ
(ب) بالنسبة للنقطة ب
(جـ) بالنسبة لمركز المربع

الحل

(أ) $جـ_{أ} = ٥ × ١٠ + ٨ × ١٠$
$= ١٣٠$ نيوتن . سم

(ب) $جـ_{ب} =$
لاحظ أنه $ب هـ = \frac{١٠ × ١٠}{١٠\sqrt{٢}} = ٥\sqrt{٢}$ سم
ومن خواص المربع هو نصف قطر $= \frac{١٠\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$

$جـ_{ب} = - ٥\sqrt{٢} × ٥\sqrt{٢} + ٨ × ١٠$
$= - ٥٠ + ٨٠ = ٣٠$ نيوتن . سم

(جـ) بالنسبة لمركز المربع كل قوة تبعد عنه نصف ضلع
$= ٥$ سم
$جـ_{هـ} = ٣ × ٥ + ٥ × ٥ + ٨ × ٥$
$= ٨٠$ نيوتن . سم

لاحظ أننا نتلاشى القوة التى تمر بالنقطة التى نريد حولها العزم . ونستخدم فائدة الإشارات وفى حالة رسم مربع بترتيب مختلف ستختلف الإشارات . فالعبرة بالمرسوم

---

٥ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث . جم تؤثر فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـب}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{أد}$ على الترتيب. فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من جـ ، مركز المستطيل = صفر أوجد ق ، ك

الحل

∵ $جـ_{جـ} =$ صفر
∴ $١٦ × ١٢ - ك × ٨ = ٠$
$١٩٢ = ٨ ك$
∴ ك = ٢٤ ث . جم

، ∵ $جـ_{م} =$ صفر
$١٦ × ٦ - ١٤ × ٤ + ق × ٦ - ك × ٤ = ٠$
$٩٦ - ٥٦ + ٦ ق - ٩٦ = ٠$
∴ $٦ ق = ٥٦$
∴ $ق = \frac{٢٨}{٣} = ٩\frac{١}{٣}$ ث . جم

٦ $\overline{اب جـ}$ مثلث قائم الزاوية فى ب

فيه اب = ٦ سم ، بجـ = ٨ سم

اثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ فى مستوى المثلث

بحيث كان جـا = جـب = ٦٠ نيوتن.سم

، جـجـ = − ٦٠ نيوتن.سم أوجد

مقدار $\overrightarrow{ق}$ وعين خط عملها.

الحل

∵ جـا = جـب

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{اب}$

، ∵ جـب = − جـجـ

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف بجـ

∵ جـب = ق × ٤ = ٦٠

∴ ٤ ق = ٦٠ ∴ ق = ١٥ نيوتن

وخط عملها // $\overleftrightarrow{اب}$ وينصف بجـ

اى فى اتجاه $\overrightarrow{هـ د}$

لاحظ: ان هذا الاتجاه يجعل العزوم حول

ا ، ب موجبه وحول جـ سالبه

وهو ده المطلوب

٧ أكمل

م إذا كان عزم قوة حول نقطة ثابتاً

فإن مقدار القوة يتناسب عكسياً مع ....

ذراع العزم

ق × ل = ثابت

ق ∝ $\frac{1}{ل}$

ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها

من نقطة ا مسافة ٨ سم فإن معيار

عزمها حول ا = ... نيوتن.سم

معيار العزم = ق × ل = ٥٠ × ٨ = ٤٠٠ نيوتن.سم

أو = ٤ نيوتن.م لاحظ الوحدات

٨ إذا كان عزم القوة ق حول نقطة و

= عزم القوة ٥٠ نيوتن حول نقطة و

فما مقدار ق ؟

الحل

− ق × ٥٠ = − ٥٠ × ٥٠√٣

٥٠ ق = ٥٠ × ٥٠√٣

∴ ق = ٥٠√٣ نيوتن

٩ فى الشكل ده

شد اب

يؤثر على عمود مائل

جـ د أوجد معيار عزم

قوة الشد بالنسبة للنقطة د.

٢٠ نيوتن جـ ا ب د ٢ م ٣٠ سم م

الحل

$جـ هـ = \sqrt{(١)^٢ + (٢,٣)^٢}$

$= \frac{\sqrt{٦٢٩}}{١٠}$ متر

كل الفكرة انشاء نزيد الذراع العمودي على القوة وهو ءهـ

$\because جا\theta = \frac{ب جـ}{أ جـ} = \frac{ءهـ}{ءأ}$

$\frac{ءهـ}{٢} = \frac{١}{(\sqrt{٦٢٩} \div ١٠)}$

$\therefore ءهـ = ٢ \div \left[\frac{\sqrt{٦٢٩}}{١٠}\right]$

$\therefore ءهـ = \frac{٢٠}{\sqrt{٦٢٩}}$

$\therefore ج_و = ٢٢٠ \times \frac{٢٠}{\sqrt{٦٢٩}}$ ≃ ١٧٥,٤ نيوتن.م

١٠ أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة للنقطة و

الحل

$ج_و = ٢٠٠ جا٣٠° \times ٤٠ - ٢٠٠ جتا٣٠° \times ٦٠$

$ج_و = -٦٣٩٢,٣$ نيوتن.سم

١١ فى الشكل ده اثبت ان محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن ، ٨٠√٢ نيوتن تمر بالنقطة جـ

الحل

لاحظ انه العمود الساقط من جـ إلى القوة

جـ هـ ضلع مقابل للزاوية ٤٥° فى مثلث وتره ٢٥سم

$\therefore جـهـ = ٢٥ جا٤٥°$

ضيف لعزوم حول جـ

$\because ج_١ = ١٠٠ \times ٢٠ = ٢٠٠٠$ نيوتن.سم

$، ج_٢ = -٨٠\sqrt{٢} \times ٢٥ جا٤٥° = -٢٠٠٠$ نيوتن.سم

$\because ج_١ = -ج_٢ \therefore$ محصلة القوتين تمر بنقطة جـ

١٢ فى الشكل المقابل أ ب ذراع رافعة فإذا كان الشد فى الخيط = ١٤٠ نيوتن ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن أوجد مجموع عزمى القوتين حول ب

الحل

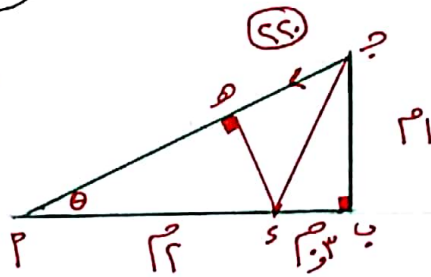
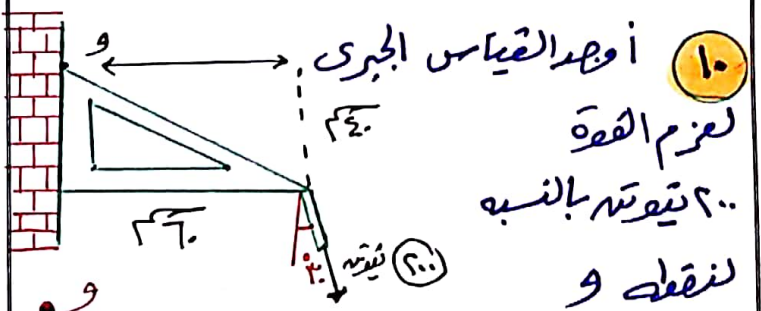
من هندسة الشكل أء = ١٥ م من فيثاغورث

فى △ ب ء ن $جاهـ = \frac{ب ن}{ب ء} = \frac{ب ن}{٥}$

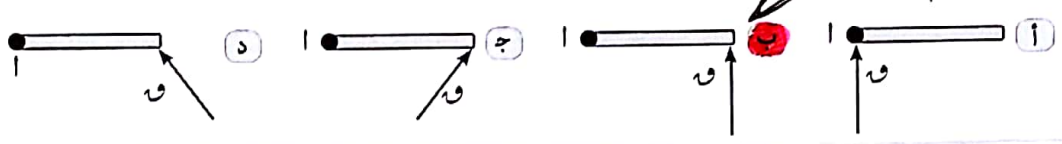
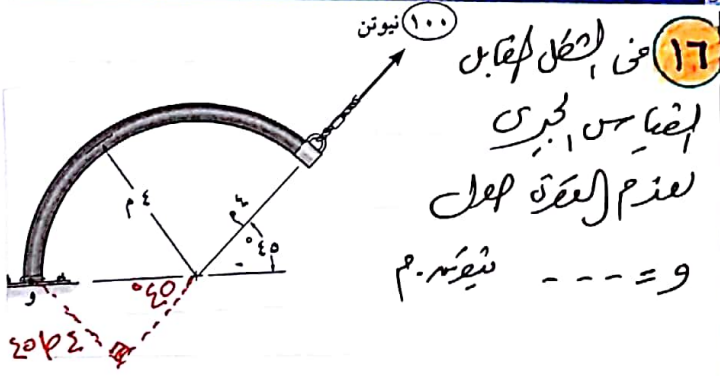
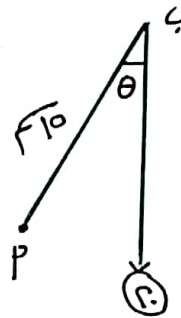
فى △ أ ب جـ $جاهـ = \frac{أ جـ}{أ ء} = \frac{١٢}{١٥}$

$\therefore \frac{ب ن}{٥} = \frac{١٢}{١٥} \quad \therefore ب ن = ٤$ م

$\therefore$ مجموع عزمى القوتين حول ب

$= -١٢٥ \times ٤ + ١٤٠ \times ٤ = ٦٠$ نيوتن.م

١٣ قضيب طول ل يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه.
اثرت على نهايته الاخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ إذا كانت ق يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم

(أ) ل جا θ (ب) ل جتا θ (ج) ل (د) ل ظا θ

١٤ الشكل المقابل يمثل باب متصل بمفصل عند ا. اثرت عليه قوة ق أى من الأشكال الآتية تكون القوة ق لها أكبر عزم عند ا

(أ) (ب) (ج) (د)

١٥ فى الشكل المقابل مقدار العزم لقوة ٢٠ نيوتن حول م ، ء ...
م [١٠ ، ٠] (ب) [٢٠ ، ٠] (ج) [٣٠ ، ٠] (ء) [٣٠٠ ، ٠]

١٦ فى الشكل المقابل القياس الجبرى لعزم القوة حول و = ... نيوتن.م
(أ) ٢٠٠ ٢√ (ب) ٢√١٠٠ (ج) ٢٠٠ ٣√ (ء) ٢٠٠

١٧ فى الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب إذا كان معيار العزم حول م = ٢٠٠ نيوتن.سم اوجد معيار القوة ق

ثانياً تلاشي الأبعاد

(١) إذا كانت:

$\vec{ق} = ٢\vec{س} + ٣\vec{ص} - \vec{ع}$

تؤثر في $أ = (١ ، -١ ، ٤)$ أوجد

(أ) عزم $\vec{ق}$ حول و

(ب) عزم $\vec{ق}$ حول ب $(٢ ، -٣ ، ١)$

* ثم أوجد طول العمود المرسوم من ب إلى خط عمل القوة.

الحل

(أ) $\vec{وأ} = \vec{أ} - \vec{و} = (١ ، -١ ، ٤)$

$\therefore \vec{ج}_و = \vec{وأ} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

$= (١ - ١٢)\vec{س} - (-١ - ٨)\vec{ص} + (٣ + ٢)\vec{ع}$

$= -١١\vec{س} + ٩\vec{ص} + ٥\vec{ع}$

(ب) $\vec{بأ} = \vec{أ} - \vec{ب} = (١ ، -١ ، ٤) - (٢ ، -٣ ، ١)$

$= (-١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \vec{ج}_ب = \vec{بأ} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

$= (-٢ - ٩)\vec{س} - (١ - ٦)\vec{ص} + (-٣ - ٤)\vec{ع}$

$= -١١\vec{س} + ٥\vec{ص} - ٧\vec{ع}$

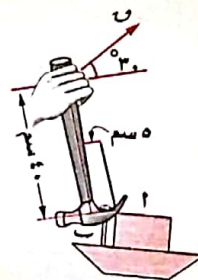
* طول العمود من (ب) $= \dfrac{\|\vec{ج}_ب\|}{\|\vec{ق}\|}$

$= \dfrac{\sqrt{١٢١ + ٢٥ + ٤٩}}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}} \simeq ٣,٧٣$ وحدة طول

---

(٢) قوة $\vec{ق} = ١٥\vec{س} - ٢٥\vec{ص} + ٤٠\vec{ع}$ (ق س، ق ص، ق ع)

تؤثر في $أ(-٣ ، -٣ ، ٢)$ (س، ص، ع)

أوجد مركبة عزم $\vec{ق}$ حول محور ص.

الحل

احفظ القوانين في أول الوحدة.

$ج_ص = ع ق_س - س ق_ع$

$= ٢ \times ١٥ - (-٣ \times ٤٠)$

$= ١٥٠$

لو مش حافظها ممكن تعمل المحدد وتاخد $ج_ص$

---

(٣) إذا كانت $\vec{ق}$ تؤثر في $أ(٢ ، -١ ، ٣)$

فإذا كان عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل $= ٢١\vec{ص} + ٧\vec{ع}$ أوجد $\vec{ق}$

حيث $\vec{ق}$ توازي محور السينات.

الحل

من الفراغين $\because \vec{ق}$ توازي محور السينات

فنفرض أن $\vec{ق}$ (ل ، ٠ ، ٠)

$\vec{وأ} = \vec{أ} - \vec{و} = (٢ ، -١ ، ٣)$

∴ ج‌و = وم × ق = | س ص ع ؛ ٢ −١ ٣ ؛ ل ٠ ٠ |

= (٠) س − (−٣ل) ص + (٠ + ل) ع

= ٣ل ص + ل ع

= ٢١ ص + ٧ ع معطى

∴ ل = ٧

∴ ق = ٧ س

---

٤ في الشكل المقابل قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في م‌ب أوجد عزم القوة حول ء

الحل

و (٠، ٠، ٠)

م (٠، ٠، ٣)

ج (٤، ٠، ٠)

ء (٠، ١٢، ٠)

ب (٤، ١٢، ٠)

م‌ب = ب − م = (٤، ١٢، −٣)

م‌ب* = (٤، ١٢، −٣) / √(١٦ + ١٤٤ + ٩) = ١/١٣ (٤، ١٢، −٣)

ق = ق × م‌ب / ||م‌ب||

ق = ١٣٠/١٣ (٤، ١٢، −٣)

∴ ق = (٤٠، ١٢٠، −٣٠)

ج‌ء = ءم × ق   (لاحظ أم نقطة التأثير)

ءم = م − ء = (٠، −١٢، ٣)

ج‌ء = | س ص ع ؛ ٠ −١٢ ٣ ؛ ٤٠ ١٢٠ −٣٠ |

= (٣٦٠ − ٣٦٠) س − (٠ − ١٢٠) ص + (٠ + ٤٨٠) ع

= ٠ س + ١٢٠ ص + ٤٨٠ ع

= ١٢٠ ص + ٤٨٠ ع

---

٥ أوجد عزم القوة ق = ١٥√١١ نيوتن حول نقطة و

الحل

م = (٠، ٠، ١٥) ، ب = (−٥، ٥، ٠)

م‌ب = ب − م = (−٥، ٥، −١٥)

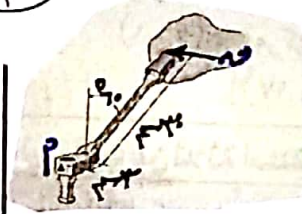
∴ ق = ق × م‌ب / ||م‌ب|| = ١٥√١١ (−٥، ٥، −١٥) / √(٢٥ + ٢٥ + ٢٢٥)

∴ ق = (١٥√١١ / ٥√١١) (−٥، ٥، −١٥) = (−١٥، ١٥، −٤٥)

∴ ج‌و = وم × ق   (لاحظ أم نقطة التأثير)

ج‌و = (٠، ٠، ١٥) × (−١٥، ١٥، −٤٥)

= | س ص ع ؛ ٠ ٠ ١٥ ؛ −١٥ ١٥ −٤٥ |

= −٢٢٥ س − ٢٢٥ ص

٦ إذا كان عزم القوة ق حول العمود على ذراع الدوران بالنسبة للنقطة م = ٦٢٠ نيوتن.سم أوجد ق

الحل

∵ طول العمود = $\frac{\|ج_م\|}{\|ق\|}$

∴ طول العمود = $\sqrt{(٣٠)^2 + (٣)^2 - ٢ \times ٣٠ \times ٣ \times جتا ١٥٠}$

≈ ٣٢,٦٣ (مع جيب التمام)

∴ $\|ق\| = \frac{٦٢٠}{٣٢,٦٣}$ ≈ ١٩ نيوتن

$$= ٦٢٥ \times \frac{(٥، -١٠، ٥)}{\sqrt{٢٥ + ١٠٠ + ٢٥}}$$

$$= ٥ (٥، -١٠، ٥) = (٢٥، -٥٠، ٢٥)$$

ج$_و$ = وهـ × ق = (هـ - و) × ق

س	ص	ع
٠	٠	١٠
٢٥	٥٠-	٢٥

= - ٥٠٠ س + ٢٥٠ ص

مركبة عزم ق حول محور س = - ٥٠٠

مركبة عزم ق بالنسبة لمحور ص = ٢٥٠

مركبة عزم ق بالنسبة لمحور ع = صفر

٧ فى الشكل المقابل قوة ٦٢٥ نيوتن تؤثر فى هـم أوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الإحداثيات حيث م المركز الهندسى للوجه أ ب جـ د

الحل

من هندسية الشكل (نصف س، ع)

هـ = (٠، ٠، ١٠) ، م = (٥، ١٠، ٥)

∴ هـم = م - هـ = (٥، ١٠، -٥)

∴ ق = ق × $\frac{هـم}{\|هـم\|}$

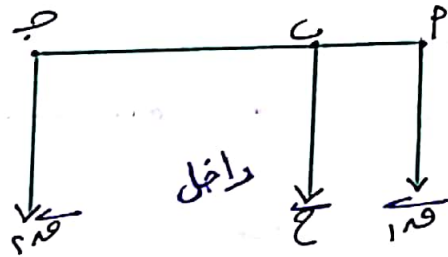
الوحدة الثالثة
القوى المتوازية المستوية

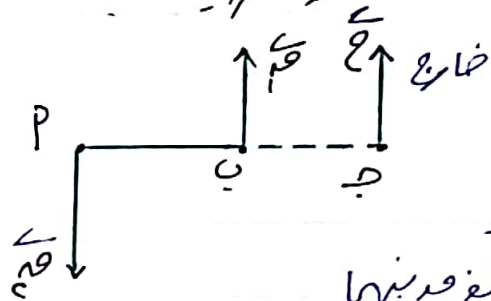
١ محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتين الاتجاه

$ح = ق_1 + ق_2$

داخل

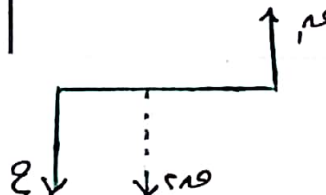
$ق_1$ × بعدها عن المحصلة = $ق_2$ × بعدها عن المحصلة

$ق_1 \times أب = ق_2 \times ب جـ$

٢ محصلة قوتين متضادتين فى الاتجاه

خارج

- تكون فى اتجاه القوة الاكبر وتساوى الفرق بينهما

$ح = ق_1 - ق_2$

$ق_1 \times أجـ = ق_2 \times ب جـ$

* إذا علمت إحدى القوتين والمحصلة لتعيين القوة الثانية

١ أولاً $ق_1$ ، $ح$ فى اتجاهين متضادين

- تكون ح فى اتجاه الأكبر

$ق_2 = ح + ق_1$

٢ ثانياً $ق_1$ ، $ح$ فى اتجاه واحد $ح > ق_1$

يبقى المحصلة فى بينهم وتساوى مجموعهم

$ق_2 = ح - ق_1$

$ح > ق_1$

٣ ثالثاً $ق_1$ ، $ح$ فى اتجاه واحد $ح < ق_1$

$ق_2 = ق_1 - ح$

لاحظ

١ إذا انتقلت $ق_2$ مسافة $س$ فإن المحصلة تنتقل $\left(\frac{ق_2}{ق_1 + ق_2}\right) س$

٢ إذا كان $ق_1 = (س ، ص)$

، $ق_2 = (ل س ، ل ص)$ ∴ $ق_1 // ق_2$

٣ نقطة تأثير المحصلة

$(س ، ص) \leftarrow$

$س = \frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2}$

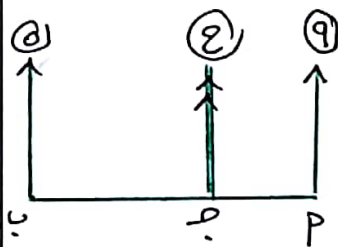
$ص = \frac{ق_1 ص_1 + ق_2 ص_2}{ق_1 + ق_2}$

④ شرط اتزان مجموعة من القوى المتوازية

المحصلة = صفر

① مج س = ٠   مج ص = ٠

② مجموع العزوم حول أى نقطة = صفر

$\text{ج}_\text{م} = \text{صفر}$

المسائل

① فى الشكل المقابل

إذا كان م ب = ٧ سم

فإن ح = ... نيوتن

م جـ = ... سم

الحل

* ح = ٩ + ٥ = ١٤ نيوتن

٩ (م جـ) = ٥ (ب جـ)

٩ (م جـ) = ٥ (٧ − م جـ)

٩ م جـ = ٣٥ − ٥ م جـ

١٤ م جـ = ٣٥

* ∴ م جـ = ٢,٥ سم

② فى الشكل المقابل

ح = ...

ب جـ = ...

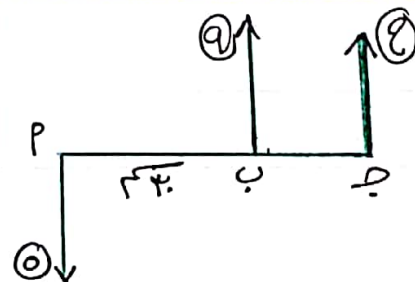
الحل

ح = ٩ − ٥ = ٤ نيوتن

٩ ب جـ = ٥ (٣٠ + ب جـ)

٩ ب جـ = ١٥٠ + ٥ ب جـ

٤ ب جـ = ١٥٠

∴ ب جـ = ٣٧,٥ سم

③ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المطلوبة والمحصلة

(أ) فى اتجاه واحد

(ب) فى اتجاهين متضادين

الحل

(أ) فى اتجاه واحد

تكون القوة ق٢ فى عكس الاتجاه

ق٢ = ٥٠٠ − ٣٥٠ = ١٥٠ نيوتن

٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ (٥١ + س)

٥١ + س = $\frac{٥٠٠ \times ٥١}{١٥٠}$ = ١٧٠

∴ س = ١٧٠ − ٥١ = ١١٩ سم

(ب) فى اتجاهين متضادين

المحصلة تكون فى اتجاه الأكبر

∴ المجهوله هى الأكبر

ق = ٣٥٠ + ٥٠٠ = ٨٥٠ نيوتن

٨٥٠ س = ٥٠٠ × ٥١

∴ س = $\frac{٥٠٠ \times ٥١}{٨٥٠}$ = ٣٠ سم

البعد بينهما = ٥١ - ٣٠ = ٢١ سم

٢ ب جـ + جـ م = ٢ س + ٢ ب جـ - ٢ م

م = ٢ س - ٢ م

٣ م = ٢ س

م = $\frac{٢}{٣}$ س #.

(٤) قوتان متوازيتان ومى نفس الاتجاه

مقداريهما ق ، ٢ ق وتؤثران فى

م ، ب بالترتيب تحركت ٢ ق موازية

لنفسها فى اتجاه م ب مسافة س سم.

اثبت ان المحصلة تتحرك فى نفس

الاتجاه مسافة قدرها $\frac{٢}{٣}$ س سم.

الحل

م جـ = ٢ ب جـ ← *

فى الحالة الثانيه نفرض أن المحصلة تحركت م

ق × م جـ = ٢ ق (ب جـ)

(م جـ + م) = ٢ (س + ب جـ - م)

∴ م جـ = ٢ ب جـ

(٥) تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ق_٢}$ = -٩ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

فى النقطتين م (-١، ٠) ، ب (١، ٢)

على الترتيب

أوجد محصلة القوتين ونقطة تأثيرها.

الحل

$\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$

= -٦ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$

∵ $\overrightarrow{ق_٢}$ = -٣ $\overrightarrow{ق_١}$ ∴ القوتان متوازيتان

ومتضادتان فى الاتجاه.

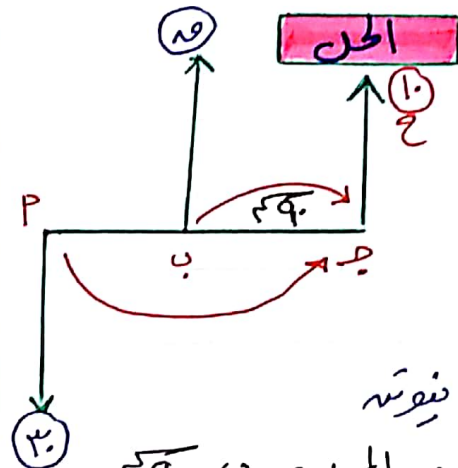
س = $\frac{ق_١ س_١ + ق_٢ س_٢}{ق_١ + ق_٢}$ = $\frac{-٣ - ٩}{٣ - ٩}$

= $\frac{-١٢}{-٦}$ = ٢

ص = $\frac{ق_١ ص_١ + ق_٢ ص_٢}{ق_١ + ق_٢}$ = $\frac{٠ + ٦}{-١ + ٣}$ = ٣

∴ نقطة تأثير القوه هى

(٢، ٣)

٦ قوتان متوازيتان أصغرهما ٣٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف أب والكبرى تؤثر في ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول أب

الحل

المحصلة في اتجاه الأكبر

ح = ق − ٣٠

١٠ = ق − ٣٠

∴ ق = ٤٠ نيوتن

لاحظ أن بعد المحصلة عن ب = ٩٠ سم

∴ ب جـ = ٩٠ سم

ق × ب جـ = ٣٠ × أ جـ

٤٠ × ٩٠ = ٣٠ (أب + ٩٠)

∴ (أب + ٩٠) = $\frac{٤٠ \times ٩٠}{٣٠}$ = ١٢٠

∴ أب = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ سم

---

٧ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقداريهما ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران في أ ، ب حيث أب = ٣٩ سم . إذا أضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات . أوجد : ق

الحل

أولاً :

ح = ٥ + ٨ = ١٣ نيوتن

٥ أ جـ = ٨ ب جـ

٥ س = ٨ (٣٩ − س)

٥ س = ٣١٢ − ٨ س

١٣ س = ٣١٢ ∴ س = ٢٤ سم

ثانياً :

∵ المحصلة تتحرك ٨ وحدات

∴ أ جـ = ٢٤ − ٨ = ١٦ سم

، جـ ب = ٣٩ − ١٦ = ٢٣ سم

(ق + ٥) × أ جـ = ٨ (ب جـ)

(ق + ٥) × ١٦ = ٨ × ٢٣

١٦ ق + ٨٠ = ١٨٤

١٦ ق = ١٨٤ − ٨٠ = ١٠٤

∴ ق = ٦٫٥ نيوتن

---

٨ إذا كانت ق١ // ق٢ ، ق١ = س − ٢ ص ، ‖ق٢‖ = ٤ √٥ وحدة

فإن ق٢ = ------

الحل

∵ ق١ // ق٢ ∴ ق٢ = ك ق١

‖ق٢‖ = ‖ك ق١‖ ⇐ ‖ق٢‖ = |ك| ‖ق١‖

٤ √٥ = |ك| √٥ ∴ |ك| = ٤

∴ ك = ±٤

∴ ق٢ = ٤ س − ٨ ص أو ق٢ = −٤ س + ٨ ص

(٩) في الشكل المقابل

المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتؤثر رأسياً على نقطة تبعد ٤ سم من ٩ أوجد ق ، ك

الحل

∵ المحصلة تعمل رأسياً

∴ ٢٠٠ + ك − ق − ١٠٠ = ٣٠٠

ك − ق = ٢٠٠ ← (١)

∵ مجموع العزوم حول ٩ = عزم المحصلة حول ٩

٢٠٠×١٠ + ك×٣ − ق×٧ = ٣٠٠×٤

٣ك − ٧ق = ١٢٠٠ − ٢٠٠٠

٣ك − ٧ق = −٨٠٠ ← (٢)

بضرب (١)×−٧

−٧ك + ٧ق = −١٤٠٠

−٤ك = −٢٢٠٠

∴ ك = ٥٥٠ نيوتن

ك − ق = ٢٠٠

٥٥٠ − ق = ٢٠٠

٥٥٠ − ٢٠٠ = ق

∴ ق = ٣٥٠ نيوتن

(١٠) في الشكل المقابل:

٩ب قضيب منتظم محمول على حاملين كما بالشكل أوجد

ر١ = ... ، ر٢ = ...

∵ المجموعة متزنة

∴ ر١ + ر٢ = ١٤٠ ← (١)

جـ٩ = صفر

١٤٠×٧٥ − ١٠٠ ر٢ = ٠

١٠٠ ر٢ = ١٤٠×٧٥

∴ ر٢ = ١٠٥ ث.جم

∴ ر١ = ٣٥ ث.جم

(١١) لوح ٩ب منتظم كتلته ١٠ جم وطوله ٤ م يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند ٩ والآخر عند نقطة تبعد ١متر عن ب. بين على أي بعد يقف طفل على اللوح وزنه ٥٠ ث.جم لكي يتساوى ردي الفعل على الحاملين.

الحل

نفرض أن الطفل يبعد مسافة س عن م
∵ المجموعة متزنة
∴ $ر_1 + ر_2 = ١٠ + ٥٠$
$ر_1 + ر_2 = ٦٠$ ⟵ ①

لكى يتساوى ردى الفعل
∴ $ر_1 = ر_2 = ٣٠$ ث.كجم

∵ $ج_م = ٠$
$٥٠ س + ١٠ × ٢ = ٣٠ × ٣$
$٥٠ س = ٩٠ - ٢٠$
$٥٠ س = ٧٠$
∴ $س = ١٫٤$ م
∴ الطفل يبعد ١٫٤ م من م

(١٢) يرتكز قضيب $\overline{أب}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقياً فى حالة إتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد

(أ) مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.
(ب) مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم

الحل

(أ) من شروط الاتزان

$ر + ش = ٤٠٠$ ⟵ ①

∵ $ج_ب = ٠$
$٤٠ ر = ٤٠٠ × ٣٠$
∴ $ر = ٣٠٠$ ث.جم
∴ $ش = ١٠٠$ ث.جم

(ب) الحالة الثانية عندما يكون الشد عند ب على وشك الانعدام

$ج_{جـ} = $ صفر
$٢٠ و = ٤٠٠ × ١٠$
∴ $و = ٢٠٠$ ث.جم

(١٣) $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع الاتزان أفقياً على حاملين أملسين عند ب ، جـ حيث أب = ٦٠ سم ، جـ د = ٢٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ وجد أنه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ث.جم أو من الطرف د ثقل قدره ١٨٠ ث.جم كان القضيب على وشك الدوران

أوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين

الحل

عند تعليق ثقل ١٢٠ ث . جم من م يكون القضيب على وشك الدوران حول ب

∴ ر٢ = ٠

، ∵ ع ب = ٠

∴ و (٢س − ٦) − ١٢٠ × ٦ = ٠

و (٢س − ٦) = ١٢٠ × ٦

و (س − ٣) = ٣٦٠ ⟵ (١)

عند تعليق ثقل ١٨٠ ث . جم من ء يصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ

∴ ر١ = ٠

، ∵ ع جـ = صفر

∴ ١٨٠ × ٧ − و (٣س − ٧) = ٠

و (٣س − ٧) = ١٨٠ × ٧ ⟵ (٢)

بقسمة (٢) على (١)

$$\frac{و(٣س-٧)}{و(س-٣)} = \frac{١٨٠ \times ٧}{٣٦٠}$$

$$\frac{٣س-٧}{س-٣} = \frac{٧}{٢}$$

٦س − ١٤ = ٧س − ٢١

٧س − ٦س = −١٤ + ٢١

∴ س = ٧

∴ ب م = ٨ سم ، جـ م = ١٤ سم

∴ البعد بين الحاملين = ٨ + ١٤ = ٢٢ سم

من (١)

∴ و (٧ − ٣) = ٣٦٠

٤ و = ٣٦٠

∴ و = ٩٠ ث . جم

---

(١٤) تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ في النقط أ (٢ ، ١) ، ب (−٤ ، −٣) ، جـ (٣ ، ٥) ، ء (−١ ، ٠) على الترتيب فإذا كانت ق١ = ٣ س + ٤ ص ، ||ق٢|| = ٢٠ نيوتن في نفس اتجاه ق١ . أوجد كلاً من ق٣ ، ق٤ إذا كانت تعملان في اتجاه مضاد لاتجاه ق١ .

الحل

∵ ق٢ // ق١ ∴ ق٢ = ل ق١

∴ ||ق٢|| = |ل| ||ق١||

٢٠ = |ل| × ٥ ∴ |ل| = ±٤

ولأنهما في نفس الاتجاه ∴ ل = ٤

∴ $\vec{ق_٢} = ١٢\vec{س} + ١٦\vec{ص}$

∵ $\vec{ق_٣} // \vec{ق_٢}$ ∴ $\vec{ق_٣} = م \vec{ق_٢}$

∴ $\vec{ق_٣} = (٣م ، ٤م)$

∵ القوى متزنة ∴ $ج_ء$ = صفر

∴ $\vec{ء ٢} \times \vec{ق_١} + \vec{ء ب} \times \vec{ق_٢} + \vec{ء ج} \times \vec{ق_٣} = \vec{٠}$

∴ $(٤-١) \times (٤، ٣) + (٣- ، ٣-) \times (١٢، ١٦)$
$+ (٤ ، ٥) \times (٣م ، ٤م) = \vec{٠}$

∴ $١٢ + ٣ - ٤٨ + ٣٦ + ١٦م - ١٥م = ٠$

$٣ + م = ٠$

∴ $م = -٣$

∴ $\vec{ق_٣} = -٩\vec{س} - ١٢\vec{ص}$

∵ القوى متزنة

∴ $\vec{ق_١} + \vec{ق_٢} + \vec{ق_٣} + \vec{ق_٤} = \vec{٠}$

∴ $\vec{ق_٤} = -\vec{ق_١} - \vec{ق_٢} - \vec{ق_٣}$

∴ $\vec{ق_٤} = -٦\vec{س} - ٨\vec{ص}$

---

(١٥) ثلاث قوى متوازية $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ تؤثر على قضيب فى النقط ٢ ، ب ، جـ والتى تبعد ٢ سم ، ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب من احد الطرفين فإذا كان القضيب متزن فإن

$ق_١ : ق_٢ : ق_٣ = ...$

(أ) ١ : ٢ : ٣ (ب) ٢ : ٣ : ١
(جـ) ٣ : ٢ : ١ (د) ١ : ٣ : ٢

---

(١٦) ٢ب قضيب منتظم وزنه ١٠ نيوتن

فإذا كان اكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف ٢ دون ان يختل التوازن هو ك فإن ك = ...

٢٥ نيوتن ٢٠ نيوتن **١٥ نيوتن** ٥ نيوتن

اكبر ثقل عند ٢ ∴ القضيب على وشك الانفصال من جـ

∴ ر٢ = ٠ ، ∴ جـ ب = ٠

٢٠ ك = ٣٠ × ١٠

∴ ك = ١٥ نيوتن

ذاكر وركز واجبر

واتعلم الصبر من الزمالك تعدى يتغلب من الأهلى ١٢ سنة فى الدورى وفى الآخر ربنا كرمه وقدر يغلب الأهلى فى ماتش الفرقة كلها كانت غايب .

(١٧) في الشكل المقابل قضيب في حالة اتزان فإن ق = ...

(أ) ٢٨ نيوتن (ب) ١٦ نيوتن (ج) ٢ نيوتن (د) ٤ نيوتن

السبب

$ج_ء = ٠$

٢ق + ١٢ × ٤ − ٢٠ × ٤ = ٠

٢ق = ٨٠ − ٤٨

٢ق = ٣٢ ∴ ق = ١٦ نيوتن

(١٨) قيمة θ التي تولد أكبر عزم حول ب = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٣٠°

(١٩) قيمة ى التي تولد أكبر عزم حول ب = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٣٠°

يجب أن تنطبق القوة على العمود فتصبح ى = ٠°

(٢٠) وضعت ثلاثة أجسام أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث.كجم على قضيب خفيف. عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً.

الحل

ق = ٥ + ٧ + ١١

ق = ٢٣ ث.كجم

نفرض أن نقطة التعليق تبعد س عن أ

$∵ ج_أ = صفر$

٧ × ٦ + ١١ × ١٥ = ٢٣ س

٢٣ س = ٢٠٧

∴ س = $\frac{٢٠٧}{٢٣}$ = ٩ سم

∴ نقطة التعليق تبعد ٩ سم عن أ

(٢١) إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب أ ب مهمل الوزن ح = ١٣,٦ ث.كجم وتؤثر لأعلى في نقطة تبعد ٣م على يمين أ أوجد مقدار واتجاه نقطة تأثير القوة الثالثة.

الحل

∵ ٢٠ ي + ١٨ ي + ق = ١٣٫٦ ي

∴ ق = (١٣٫٦ − ٣٨) ي

∴ ق = − ٢٤٫٤ ي

أى تؤثر لأسفل

ي ، ١٨ ، ٢٠ ، ٠٫٦م ، ٠٫٤م ، أ ، س ، ب ، ق ٢٤٫٤

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

− ٢٤٫٤ × س + ١٨ × ٠٫٦ + ٢٠ × ٤ = ١٣٫٦ × ٣

− ٢٤٫٤ س = ١٣٫٦ × ٣ − ١٨ × ٠٫٦ − ٢٠ × ٤

− ٢٤٫٤ س = − ٥٠

∴ س = ٢٫٠٥ م بعداً عن أ لأسفل

(٢٢)

الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه م وضع عليه جسم كما بالشكل أى من القوى الآتية تحدث توازن للقضيب ....

(أ) قوة ١٠ نيوتن لأعلى على بعد ٢٠ سم يمين منتصف القضيب

(ب) قوة ١٠ نيوتن لأسفل على بعد ٢٠ سم يمين منتصف القضيب

(ج) قوة ٣٠ نيوتن لأعلى على بعد ٥ سم يسار منتصف القضيب

(د) قوة ٣٠ نيوتن لأسفل على بعد ٥ سم يسار " " .

هنا صح الاختيار الذى يجعل ج م = صفر

− ١٠ × ٢٠ + ٢٠ × ١٠ = صفر

(٢٣)

قضيب منتظم طوله ٤ م يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٣ ، ٤ ث.كجم من احدى نصفيه وعلى بعد ١ ، ١٫٥ م من منتصفه على الترتيب وعلق ثقلان ٥ ث.كجم ، و ث.كجم من النصف الآخر على بعد ½ ، ٢ م على الترتيب من منتصفه . فإذا اتزن القضيب فما قيمة و

الحل

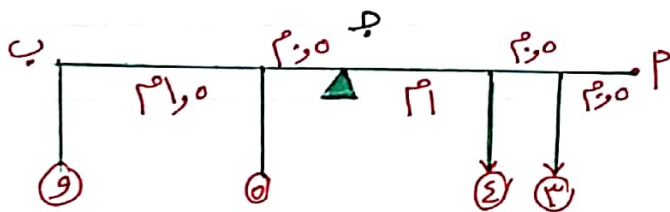
ب ، جـ ، أ ، ٢م ، ٠٫٥م ، ٠٫٥م ، ١م ، ١٫٥م ، ٠٫٥م ، و ، ٥ ، ٤ ، ٣

∵ ج م = صفر

∴ ٥ × ٠٫٥ + و × ٢ = ٤ × ١ + ٣ × ١٫٥

٢ و = ٤ + ٤٫٥ − ٢٫٥

٢ و = ٦ ∴ و = ٣ ث.كجم

(٢٤)

قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه مقدار أحدهما ٧ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ...

(أ) ٣ نيوتن (ب) ١٧ نيوتن

(ج) ٢٧ نيوتن (د) ٦ نيوتن

ح تكون فى اتجاه الأكبر

ق − ١٠ = ٧

ق = ٧ + ١٠ = ١٧

١) تكون مجموعة قوى متزنة إذا وفقط إذا كان

أ) $\vec{ح} = \vec{٠}$ ينعدم المحصلة

ب) $\vec{ج}_ب = \vec{٠}$ ينعدم العزم حول أى نقطة

$\vec{ح} = \vec{٠}$

$س = ٠$ ، $ص = ٠$

---

٢) أى كلمة أملس يكون رد الفعل عمودى

---

٣) مسائل المستوى الخشن يتحلل رد الفعل المحصل إلى رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك وتكون فى عكس اتجاه الحركة

---

٤) فى مسائل المفصل يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه لذلك يحلل إلى $س_١$ ، $ص_١$

ويكون محصلته $ر = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$ظا هـ = \frac{ص_١}{س_١}$

واستعينوا بالصبر والصلاة

المسائل

١) قضيب منتظم أب طوله ٢٠٠ سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلاً يساوى وزنه ويحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠ سم عن أ والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسياً أعلى أ فإذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° عين مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل

الحل

∵ القضيب متزن ∴ $س = ٠$ ، $ص = ٠$

$ش جا ٣٠ + ص_١ = ١٠ + ١٠$

$\frac{١}{٢} ش + ص_١ = ٢٠$

∴ $ص_١ = ٢٠ - \frac{١}{٢} ش$ ← ①

$س_١ - ش جتا ٣٠ = ٠$

∴ $س_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} ش$ ← ②

∵ جـ = صفر

$\cdot = ١٥٠ \times ١ص + ١٠ \times ٥٠ - ١٠ \times ٥٠$

∴ ١٥٠ ص١ = ٠

∴ ص١ = ٠ في ①

∴ ٠ = ٢٠ − ½ سـ

½ سـ = ٢٠

∴ سـ = ٤٠ نيوتن في ②

∴ س١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٤٠

س١ = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

∴ ر = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$ = $\sqrt{0 + (20\sqrt{3})^2}$

ر = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

ويؤثر أفقياً في اتجاه ⃖ا ب

---

② يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه ا على مستوى أملس والطرف ب على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في مستوى رأسي في وضع يميل فيه على الأفق بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف ا بنقطة من المستوى الأفقي رأسياً أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذا السلم أوجد

ا) قوة الشد في الحبل عندما يقطع الرجل ¾ طول السلم

ب) أقصى قيمة للشد في الحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل لقمة السلم

الحل

ا) بفرض أن طول السلم ل

من شروط الاتزان

سـ = ٠ ، صـ = ٠

ر١ = ٩٠ ث.كجم ← ①

ر٢ = سـ ← ②

∵ جـا = ٠

١٠ × ½ ل جتا٤٥ + ٨٠ × ¾ ل جتا٤٥ = ر٢ ل جا٤٥

٥ جتا٤٥ + ٦٠ جتا٤٥ = ر٢ جا٤٥

٦٥ جتا٤٥ = ر٢ جا٤٥

∴ ر٢ = ٦٥ ث.كجم

∵ ر٢ = سـ

∴ سـ = ٦٥ ث.كجم

ب) عندما يصعد الرجل لقمة السلم تكون المسافة المقطوعة = طول السلم = ل

ويكون ر١ = ٩٠ ث.كجم

ر٢ = سـ ← *

∴ جـا = ٠

١٠ × ½ ل جتا٤٥ + ٨٠ ل جتا٤٥ = ر٢ ل جا٤٥

٨٥ = ر٢

∴ سـ = ٨٥ ث.كجم

(٣) قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$
أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحل

من شروط الاتزان

$ر_1 = و \leftarrow (1)$

$ر_2 = \frac{1}{4} ر_1 = \frac{1}{4} و \leftarrow (2)$

$ج_م = 0$

$و \times \frac{1}{2} ل جتاهـ = ر_2 \times ل جاهـ$

$\therefore ر_2 = \frac{1}{4} و$

$\frac{1}{2} و جتاهـ = \frac{1}{4} و جاهـ \quad \times 4$

$2 جتاهـ = جاهـ$ (مقص)

$\frac{جاهـ}{جتاهـ} = \frac{2}{1}$

$\therefore ظاهـ = 2$ أى ضربه

(٤) $أب$ سلم منتظم طوله ٥م ووزنه ٢٠ ث.كجم استند السلم بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{1}{4}$ وكان الطرف ب على بعد ٣م من الحائط . أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة ثم أوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه وبين الأرض $\frac{1}{5}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب يمنعه من الانزلاق

الحل

نفرض أن السلم متزن

$\therefore ر_1 = ح$

$، ر_2 = 20$ ث.كجم

$، ج_ب = 0$

$20 \times 1.5 = ر_1 \times 4$

$\therefore ر_1 = 7.5$ ث.كجم

$\therefore ح = 7.5$ ث.كجم

$م ر_2 = \frac{1}{4} \times 20 = 5$

$\therefore ح > ح_س$ وهذا مرفوض

$\therefore$ السلم لا يمكن أن يتزن

يصد فعل الجسم الذى وزنه (و)

∵ ر = و ∴ ص = $\frac{1}{5}$ و

وهى القوة التى يؤثر بها على طرف السلم السفلى

من شروط الاتزان

$ر_2 = 20$ ث. كجم

$ر_1 = \frac{1}{5}و + \frac{1}{4}ر_2$

جـ ب = ٠

$1,5 \times 20 = 4 ر_1$

∴ $ر_1 = 7,5$ ث. كجم

∵ $ر_1 = \frac{1}{5}و + \frac{1}{4}ر_2$

∴ $\frac{1}{5}و + \frac{1}{4} \times 20 = 7,5$

$\frac{1}{5}و = 2,5$

∴ و = ١٢,٥ ث. كجم

---

(٥) فى الشكل المقابل

ملوله ٤ ل

قضيب على

وشك الانزلاق

عندما كانه

أب = ٣ ل

ق($\hat{ن م أ}$) = ٦٠°

أوجد معامل الاحتكاك، $ر_1$، $ر_2$

الحل

∵ نصف القطر عمودى على المماس

∴ ق($\hat{ب أ م}$) = ٣٠°

نحلل $ر_1$ إلى أفقى $ر_1$ جتا٦٠

رأسى $ر_1$ جا٦٠

معادلات الاتزان

$ر_1$ جا٦٠ + $ر_2$ = و

$\frac{\sqrt{3}}{2}ر_1 + ر_2 = و$ ← (١)

، $ر_1$ جتا٦٠ = م $ر_2$

$\frac{1}{2}ر_1 = م ر_2$ ← (٢)

، جـ أ = صفر

$و \times 2ل$ جتا٣٠ $- 3ل \cdot ر_1 = 0$

$3ر_1 = 2و$ جتا٣٠

∴ $3ر_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2و$

∴ $ر_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}و$ ، من (١)

∴ $ر_2 = \frac{1}{2}و$

∴ $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}و = م \times \frac{1}{2}و$

∴ $م = \frac{\sqrt{3}}{3}$

٦ اختر الاجابة الصحيحة

١ إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان اتجاه رد الفعل ....

(أ) عمودي على المستوى (ب) موازياً للمستوى
(ج) غير معلوم الاتجاه (د) يصنع ٤٥° مع المستوى

٢ يستند سلم منتظم بطرفه العلوي على حائط أملس رأسي وبطرفه السفلي على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{1}{4}$ فكان على وشك الانزلاق فإن ظل زاوية ميل السلم على الرأسي = ...

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$
(ج) ظا$^{-1}$ $\frac{1}{4}$ (د) ظا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$

٣ سلم منتظم يستند بطرفه السفلي على مستوى أفقي خشن وبطرفه العلوي على حائط رأسي أملس وكانت الزاوية بين السلم والرأسي «هـ» وكان السلم في وضع الاتزان النهائي وكان معامل الاحتكاك السكوني ($م_س$) فإن ظاهـ = ...

(أ) $م_س$ (ب) $٢م_س$
(ج) $\frac{٣}{٢}م_س$ (د) $م_س + ١$

التوضيح

$ر_١ = و$ ← (١)

$ر_٢ = م_س ر_١$

∴ $ر_٢ = م_س و$ ← (٢)

∵ جـ م = ٠

$\frac{1}{2}$ ل جاهـ و = $ر_٢$ × ل جتاهـ

$\frac{1}{2}$ و جاهـ = $م_س$ و جتاهـ

$\frac{1}{2}$ $\frac{جاهـ}{جتاهـ}$ = $م_س$ $\frac{جتاهـ}{جتاهـ}$ ÷ جتاهـ

$\frac{1}{2}$ ظاهـ = $م_س$

∴ ظاهـ = $٢م_س$ أي إجابة (ب)

لاحظ

يا دى نفس حل رقم (٢) ولكن آخر خطوة

ظاهـ = $٢ × \frac{1}{4}$

ظاهـ = $\frac{1}{2}$ ∴ هـ = ظا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$

٤ فى الشكل المقابل إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين القضيب والأرض فإن ظاهـ . ظال = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(ج) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

التوضيح

$ر_م = و \leftarrow 1$

$ر_ب = م_س \, ر_م$

$\therefore ر_ب = ظال \times ر_م$ ← (١)

$ر_ب = ظال \times و$ ← (٢)

بأخذ العزوم حول م وبفرض أن طول السلم ل

$\therefore و \times \frac{1}{2} ل \, جتاهـ = ر_ب \, ل \, جاهـ$

$\frac{1}{2} و \, جتاهـ = ر_ب \, جاهـ$ ← (٣)

$\frac{1}{2} و \, جتاهـ = ظال \, و \, جاهـ$ ÷ جتاهـ

$\frac{1}{2} = ظال \, ظاهـ$

٥ فى الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب ....

(أ) (ب) (ج) (د)

٦ قضيب خفيف طوله ل يرتكز فى وضع أفقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة ك تتزن مع الكتلتين ك١ أو ك٢ منفردتين كما هو بالشكل فإن قيمة ك بدلالة ك١، ك٢

(أ) $ك_1 + ك_2$ (ب) $\frac{1}{2}(ك_1 + ك_2)$

(ج) $ك_1 ك_2$ (د) $\sqrt{ك_1 ك_2}$

$ك س = ك_1 ص$

$ك ص = ك_2 س$

$ك = \frac{ص}{س} ك_1$ ← (١)

$ك = \frac{س}{ص} ك_2$ ← (٢) بضرب المعادلتين

$\therefore ك^2 = ك_1 ك_2 \quad \therefore ك = \sqrt{ك_1 ك_2}$

(٧) $\overline{أب}$ قضيب رفيع خفيف طوله ٢ل معلق في مستوى رأسي من طرفيه أ ، ب بخيطين يميلان على الرأسي بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب . علق في القضيب الثقلات ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من أ = $\frac{١}{٥}$ ل ، $\frac{٦}{٥}$ ل
أوجد في وضع التوازن مقدار الشد في الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقي .

الحل

معادلات الاتزان

ش١ جا٣٠° = ش٢ جا٦٠°

∴ $\frac{١}{٢}$ ش١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش٢

ش١ = $\sqrt{٣}$ ش٢ ← (١)

، ش١ جتا٣٠° + ش٢ جتا٦٠° = ١٠ من (٢) ، (١)

$\sqrt{٣}$ ش٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ش٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠

$\frac{٣}{٢}$ ش٢ + $\frac{١}{٢}$ ش٢ = ١٠

٢ ش٢ = ١٠

∴ ش٢ = ٥ نيوتن

ش١ = ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

∵ ع_ب = صفر

∴ −٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل جتاθ − ٢ × $\frac{٩}{٥}$ ل جتاθ

− ٥$\sqrt{٣}$ جا٣٠° × ٢ل جاθ

+ ٥$\sqrt{٣}$ جتا٣٠° × ٢ل جتاθ = ٠

÷ ل جتاθ

$-\frac{٣٢}{٥} - \frac{١٨}{٥}$ − ٥$\sqrt{٣}$ ظاθ + ١٥ = ٠

٥$\sqrt{٣}$ ظاθ = $-\frac{٣٢}{٥} - \frac{١٨}{٥}$ + ١٥

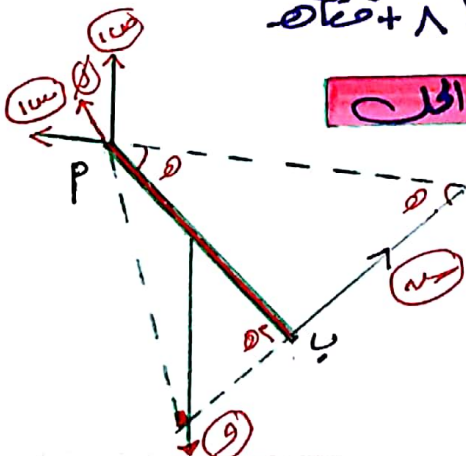
٥$\sqrt{٣}$ ظاθ = ٥

∴ ظاθ = $\frac{٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ θ = ٣٠° وهي زاوية ميل القضيب على الأفقي

---

(٨) قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط في نقطة في نفس المستوى الأفقي المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقي مساوٍ هـ
اثبت أن رد فعل المفصل = $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + قتا^٢ هـ}$

الحل

بتحليل رد فعل المفصل إلى س١ ، ص١

∴ معادلات الاتزان :

$س_١ = $ شد جتاهـ ← (١)

$ص_١ + $ شد جاهـ $=$ و

$ص_١ = $ و $-$ شد جاهـ ← (٢)

∴ جـم $= ٠$

$س \times ٢ ل جاهـ = و \times \frac{١}{٢} ل$ جتاهـ

$س \times ٢$ جاهـ $= \frac{١}{٢}$ و جتاهـ

÷ جاهـ

$٢ س = \frac{١}{٢}$ و $\frac{جتاهـ}{جاهـ}$

$\frac{١}{٢}$ و ظتاهـ $= ٢ س$

∴ شد $= \frac{١}{٤}$ و ظتاهـ

بالتعويض فى (١)

∴ $س_١ = \frac{١}{٤}$ و جتاهـ $\times \frac{١}{جاهـ}$

$س_١ = \frac{١}{٤}$ و ظتاهـ

فى (٢)

، $ص_١ = $ و $- \frac{١}{٤}$ و جاهـ $\times \frac{١}{جاهـ}$

$ص_١ = \frac{٣}{٤}$ و

∴ ر (فعل المفصل)

$ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$

$ر = \sqrt{\frac{١}{١٦} و^٢ ظتا^٢ هـ + \frac{٩}{١٦} و^٢}$

$ر = \frac{١}{٤}$ و $\sqrt{ظتا^٢ هـ + ٩}$

تذكر أن $١ + ظتا^٢ هـ = قتا^٢ هـ$

∴ $٩ + ظتا^٢ هـ = قتا^٢ هـ + ٨$

∴ $ر = \frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + قتا^٢ هـ}$ #.

---

(٩) عندما يوضع قضيب داخل اناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

بمركز الكرة

الوحدة الخامسة
الازدواج

١ الازدواج هو نظام مكون من قوتين
متساويتين فى المعيار
متضادتين فى الاتجاه
لا يجمعهما خط عمل واحد

٢ عزم الازدواج = عزم احدى قوتيه بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الاخرى.

٣ معيار عزم الازدواج =
معيار القوة × الذراع العمودى

٤ الإشارة
مع عقارب الساعة −
عكس عقارب الساعة +

٥ شرط اتزان ازدواجين
$\vec{ج}_1 + \vec{ج}_2 = \vec{0}$
أو
$\vec{ج}_1 = -\vec{ج}_2$

٦ شرط تكافؤ ازدواجين
$\vec{ج}_1 = \vec{ج}_2$

٧ الازدواج لا يكافئ الا ازدواج

٨ يتوقف تأثير الازدواج على الأجسام المتماسكة على
معيار عزمه — المستوى الذي تقع فيه قوتاه

متى تكافئ المجموعة إزدواج

١ كل زوج من القوى يكافئ إزدواج ومجموع الازدواجات = مقدار ثابت ≠ ٠

٢ إذا كانت المحصلة = ٠ ومجموع عزوم القوى حول نقطة ≠ ٠

٣ إذا أمكن تمثيلها فى اتجاه دورى واحد لمضلع القوى ممثلة تمثيلاً تاماً
فإن معيار عزم الازدواج =
ضعف مساحة المضلع × $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$

٤ إذا كان مجموع القياسات الجبرية بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى مقداراً ثابتاً ≠ ٠
فإن المجموعة تكافئ إزدواج
معيار عزمه = المقدار الثابت

المسائل

١ إذا كان $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ تكونان ازدواج فإن $\overline{ق}_1$ = ...

$\overline{ق}_1 = -\overline{ق}_2$

٢ إذا كان $\overline{ج}_1 + \overline{ج}_2 = 0$ فإن الازدواجين متزنين

إذا كان $\overline{ج}_1 = \overline{ج}_2$ فإن الازدواجين متكافئين

٣ إذا كان $\overline{ق}_1 = (٣ ، ب)$

$\overline{ق}_2 = (-أ ، ٥)$

تكونان ازدواج فإن (أ ، ب) = ...

$\overline{ق}_1 = -\overline{ق}_2$

أ = ٣ ، ب = -٥

∴ (أ ، ب) = (٣ ، -٥)

٤ القياس الجبرى لعزم الازدواج المقابل = ...

= -٤٠ × ٥٠

= -٢٠٠٠ ث كجم . سم

٥ القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل المقابل

خاكر اقليدس

هنزل عمود من رأس القائمة أ على ب د

وهيكون البعد العمودى بين القوتين = ٢ × الناتج

$أهـ = \frac{أب \times أد}{ب د} = \frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$ ← فيثاغورث

∴ البعد العمودى = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم

∴ عزم الازدواج = -١٠ × ٤٨

= -٤٨٠ نيوتن . سم

٦ إذا كان $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ قوتى ازدواج بحيث $\overline{ق}_1 = -٣\overline{س} + ٢\overline{ص}$ وتؤثر فى أ (١ ، ١) ، $\overline{ق}_2$ تؤثر فى ب (-١ ، ٢) أوجد $\overline{ق}_2$ ثم أوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أ على خط عمل $\overline{ق}_2$

الحل

∵ القوتان تكونان ازدواج

∴ $\overline{ق}_1 = -\overline{ق}_2$

∴ $\overline{ق}_2 = ٣\overline{س} - ٢\overline{ص}$

عزم الازدواج = عزم قوة حول نقطة على خط عمل القوة الأخرى

= عزم $\overline{ق_١}$ حول ب أو العكس

$\overline{ج_ب} = \overline{ب أ} \times \overline{ق_١}$

$\overline{أ} - \overline{ب} = (٢ ، -١)$

∴ $ج = (٢ ، -١) \times (-٣ ، ٢)$

$= (٤ - ٣) \overline{ع}$

$= \overline{ع}$

البعد بين أ إلى جـ

$ل = \frac{\|ج\|}{\|ق_١\|} = \frac{١}{\sqrt{٩+٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

∵ القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان إزدواج

∴ $ج_١ = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨$ نيوتن . سم

∵ القوتان (٣٢ ، ٣٢) تكونان إزدواج

∴ $ج_٢ = -٣٢ \times ٦ = -١٩٢$ نيوتن . سم

∵ القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان إزدواج

∴ $ج_٣ = -٢٠ \times ٤,٨ = -٩٦$ نيوتن . سم

∵ $ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = ٢٨٨ - ١٩٢ - ٩٦ = ٠$

∴ المجموعة متزنة #.

---

(٧) فى الشكل المقابل

أب = ٦ سم

بـ هـ = ١٦ سم .

أثبت أن المجموعة متزنة .

الحل

نسقط و ن ⊥ أ هـ

من اقليدس

و ن = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

---

(٨) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ب جـ = ٦ سم

، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع

أب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب

أثرت القوى ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن

فى $\overrightarrow{أ س}$ ، $\overrightarrow{جـ ع}$ ، $\overrightarrow{ص س}$ ، $\overrightarrow{ل ع}$ ، $\overrightarrow{ل ص}$ ،

$\overrightarrow{أ ب}$ على الترتيب اذا اتزنت

مجموعة القوى أوجد قيمة ق

الحل

نفس فكرة السؤال اللى فات بالضبط

حاول تحلها

فى الآخر ق = ٤٠ نيوتن

٩) أ ب قضيب خفيف طوله ٥٠ سم . تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى أ ، ب فى اتجاهين متضادين عموديين على القضيب . وأثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى جـ ، ء حيث جـ ء = ٣٠ سم بحيث يكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون . أوجد قياس زاوية ميل القوتين الأخريين على القضيب .

الحل

٣٠ ، ١٠٠ ، س ، ٣٠ ، هـ ، أ ، ب ، ء ، جـ ، ١٠٠ ، ٣٠

نسقط عموداً من جـ على القوة الثانية طوله س

س = ٣٠ جاهـ

معيار عزم الازدواج الأول = ٣٠ × ٥٠ = ١٥٠٠ نيوتن

لكى يتكافئ الازدواجان يجب أن يكونا فى نفس الاتجاه

−١٠٠ × س = −١٥٠٠

١٠٠ × ٣٠ جاهـ = ١٥٠٠

جاهـ = $\frac{1}{2}$

∴ هـ = ٣٠°

١٠) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أ ب = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . علقت فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسياً . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٥٠ نيوتن.سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل ء ب على الرأسى فى وضع الاتزان .

الحل

ب ء = $\sqrt{(١٨)^2 + (٢٤)^2}$

= ٣٠ سم

∴ م ء = ١٥ سم

∴ م ن = ١٥ جاهـ

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (ر ، ٢٠) تكونان ازدواج قياسه الجبرى = −١٥٠ نيوتن.سم

∴ −١٥٠ = −٢٠ × م ن

٢٠ × ١٥ جاهـ = ١٥٠ ∴ جاهـ = $\frac{1}{2}$

∴ ق(هـ) = ٣٠° أو ١٥٠°

∴ قياس زاوية ميل ب ء على الرأسى لأسفل = ٣٠° أو ١٥٠°

اختر

(١١) أى من الشروط الآتيه لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم ؟

(أ) إزاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه.
(ب) إزاحة الازدواج فى مستوى آخر يوازى مستواه .
(جـ) دوران الازدواج فى نفس مستواه .
(د) كل ما سبق .

(١٢) اثرت القوتان (أ س + ب ص) ، (٥ س - ٢ ص) فى النقطتين جـ ، د على الترتيب حيث جـ (-٢ ، ١) ، د (٣ ، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً . أوجد قيمة كل من أ ، ب ، ثم أوجد عزم الازدواج ، واوجد أيضاً البعد العمودى بين خطى عمل القوتين

الحل

∵ ق١ ، ق٢ تكونان إزدواج
∴ ق١ = - ق٢
∴ (أ ، ب) = (-٥ ، ٢)

ق١ (-٥ ، ٢) ، ق٢ (٥ ، -٢)
جـ (-٢ ، ١) ، د (٣ ، ١)

عزم الازدواج = عزم احدى قوتيه حول نقطة على خط عمل الثانية

= عزم ق١ حول د

جـ = د جـ × ق١

د جـ = جـ - د = (-٥ ، ٠)

جـ = (-٥ ، ٠) × (-٥ ، ٢)

= (-٥ × ٢) - (٠ × -٥) ع

= -١٠ ع

مركبه - وسطيه

∴ ||جـ|| = ١٠

ل = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٥ + ٤}}$ = $\frac{١٠\sqrt{٢٩}}{٢٩}$ وحدة طول .

(١٣) قوتان تكونان إزدواج ، مقدار أحدهما ١٥ نيوتن وعزم الازدواج الحصل منهما ٤٠ نيوتن.سم فإن البعد العمودى بينهما = ...

ل = $\frac{||جـ||}{ق}$ = $\frac{٤٠}{١٥}$ = ٣ سم

(١٤) فى الشكل المقابل عزم الازدواج الناتج من القوتين ٥٠ ، ٥٠ نيوتن = ...

٥٠ × ٦٠ = ٣٠٠٠ نيوتن . سم

١٥ م ا ب جـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ ث نيوتن في $\overrightarrow{اب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ ، $\overrightarrow{د هـ}$ ، $\overrightarrow{هـ و}$ ، $\overrightarrow{و ا}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه القوة التي يجب أن تؤثر في مركز المسدس حتى تؤول المجموعة إلى ازدواج ثم عين عزمه .

الحل

* $\overline{ق}_١ = ٢ \overline{س}$ ، $\overline{ق}_٢$ (٥ نيوتن)

(٥ جتا ٦٠) $\overline{س}$ ، (٥ جا ٦٠) $\overline{ص}$

* $\overline{ق}_٢ = \frac{٥}{٢}\overline{س} - \frac{٥}{٢}\sqrt{٣}\overline{ص}$

$\overline{ق}_٣$ (٤ جتا ٦٠) $-\overline{س}$ ، (٤ جا ٦٠)

* $\overline{ق}_٣ = -٢\overline{س} + ٢\sqrt{٣}\overline{ص}$

وهكذا

* $\overline{ق}_٤ = ٦\overline{س}$

* $\overline{ق}_٥ = \frac{١}{٢}\overline{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overline{ص}$

* $\overline{ق}_٦ = \frac{٣}{٢}\overline{س} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\overline{ص}$

∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج

∴ $\overline{ق} + \overline{ح} = \overline{٠}$

∴ $\overline{ق} = -\overline{ح}$

حيث $\overline{ح} = (٢ - \frac{٥}{٢} - ٢ + ٦ - \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢})\overline{س}$
$+ (٠ - \frac{٥\sqrt{٣}}{٢} + ٢\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢})\overline{ص}$

$\overline{ح} = \frac{٣}{٢}\overline{س} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overline{ص}$

∴ $\overline{ق} = -\overline{ح} = \frac{-٣}{٢}\overline{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overline{ص}$

∴ $\|\overline{ق}\| = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٣}{٤}} = \sqrt{٣}$ نيوتن

، ظاهـ $= \frac{ص}{س} = \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) \div \left(\frac{-٣}{٢}\right) = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ س ، ص سالبتان

في الربع الثالث ١٨٠ + ظا$^{-١}\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٢١٠°

، $ع_م = (٢ - ٥ + ٤ - ٦ + ١ - ٣) \times ٥\sqrt{٣}$ ← $\frac{١}{٢}ل\sqrt{٣}$

$= -٣٥\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

(١٦) مقياس عزم الازدواج المقابل = ...

(أ) ٨٠٠ نيوتن . سم
(ب) ٤٠٠ نيوتن . سم
(ج) ٤٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم
(د) - ٤٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

التوضيح

طول العمود = ٨٠ جا ٦٠

$\|ج\|$ = ٨٠ جا ٦٠ × ١٠

= - ٤٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع الازدواج

∴ القوتان (ر ، ٥٠) تكونان ازدواج قياسه الجبرى (ج)

∴ ر = ٥٠ ث . جم

ج = - ٥٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = - ٧٥٠ $\sqrt{3}$

∴ عزم الازدواج المؤثر قياسه الجبرى = ٧٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

(١٧) صفيحة م ب ج منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ $\sqrt{3}$ سم ووزنها ٥٠ ث . جم علقت الصفيحة من مسمار أفقى من ثقب بالقرب من الرأس م فاتزنت رأسياً ، أثر على الصفيحة إزدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه م ب أفقياً . أوجد عزم الازدواج المؤثر ورد فعل المسمار .

الحل

خلى الاربع الحالات التى كانت فيهم المجموعة إزدواج هنحتاجهم ياريت تحفظهم

١ أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٥ سم، أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ٥٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٣٠ في $\overrightarrow{أب}$، $\overrightarrow{جـ ب}$، $\overrightarrow{جـ د}$، $\overrightarrow{د هـ}$، $\overrightarrow{و هـ}$، $\overrightarrow{و أ}$ على الترتيب. عين عزم الازدواج المحصل

الحل

طول الضلع = ١٥ سم

البعد بين كل ضلعين متوازيين = ل $\sqrt{3}$ = ١٥ $\sqrt{3}$ سم

القوتان (٤٠، ٤٠) تكونان ازدواج

ج١ = ٤٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = ٦٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم

القوتان (٥٠، ٥٠) تكونان ازدواج

ج٢ = − ٥٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = − ٧٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم

القوتان (٣٠، ٣٠) تكونان ازدواج

ج٣ = ٣٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = ٤٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج = ٦٠٠ $\sqrt{3}$ − ٧٥٠ $\sqrt{3}$ + ٤٥٠ $\sqrt{3}$

= ٣٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم

٢ أ ب جـ د مستطيل فيه: أب = ٣٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت القوى التي مقاديرها ١٥، ٣٠، ١٥، ٣٠ في $\overrightarrow{ب أ}$، $\overrightarrow{ب جـ}$، $\overrightarrow{د جـ}$، $\overrightarrow{د أ}$ على الترتيب. اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران في أ، جـ عموديتين على أ جـ بحيث تتزن المجموعة.

الحل

من فيثاغورث

أ جـ = ٥٠ سم

القوتان (٣٠، ٣٠) تكونان ازدواج

ج١ = − ٣٠ × ٣٠ = − ٩٠٠ نيوتن.سم

القوتان (١٥، ١٥) تكونان ازدواج

ج٢ = ١٥ × ٤٠ = ٦٠٠ نيوتن.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ = − ٩٠٠ + ٦٠٠ = − ٣٠٠ نيوتن.سم

لكي تتزن المجموعة فإن القوتان ق، ق تكونان ازدواج قياسه الجبري موجب ج٢ = − ج فيكون الاتجاه كما هو مبين بالرسم

٥٠ ق = ٣٠٠

∴ ق = ٦ نيوتن

∴ القوتان هما ٦، ٦ نيوتن

(٣) أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه أد // ب جـ ، أد = ٩ سم ، أب = د جـ = ١٥ سم ، ب جـ = ٣٣ سم أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ ، $\overrightarrow{د أ}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً. وأوجد معيار عزمه.

الحل

من هندسة الشكل

ب و = هـ جـ = ١٢ سم ، أو = د هـ = ٩ سم

∵ القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ في اتجاه دوري واحد

$$\frac{٤٥}{١٥} = \frac{٩٩}{٣٣} = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٢٧}{٩} = ٣$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

القياس الجبري للعزم = -٢ × مساحة ⏢ × ٣

$$= -٢ \times \frac{٣٣ + ٩}{٢} \times ٩ \times ٣$$

= - ١١٣٤ نيوتن.سم

∴ معيار عزمه = ١١٣٤ نيوتن.سم

(٤) أ ب جـ د مستطيل فيه: أب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ث كجم في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ ، $\overrightarrow{د أ}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه.

الحل

أ جـ = ٥٠ سم

طول العمود الساقط من د أو ب على أ جـ

$$= \frac{٤٠ \times ٣٠}{٥٠} = ٢٤ \text{ سم}$$

نحسب العزوم حول أي ثلاث نقط

$ج_{أ}$ = ٤٠ × ٤ + ٣٠ × ٢ = ٢٢٠ ث كجم.سم ①

$ج_{جـ}$ = ٦ × ٣٠ + ١ × ٤٠ = ٢٢٠ ث كجم.سم ②

$ج_{د}$ = ١ × ٤٠ + ٢ × ٣٠ + ٥ × ٢٤ = ٢٢٠ ث كجم.سم ③

من ① ، ② ، ③

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢٢٠ ث كجم.سم

⑤ أثرت القوة $\overline{ق_1}$ = ٦ $\overline{ص}$ فى نقطة الأصل و القوة $\overline{ق_2}$ = -٦ $\overline{ص}$ فى النقطة (٢، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة (س، ص) لا يعتمد على س، ص.

الحل

$\overline{ق_1}$ = (٠، ٦) $\overline{ق_2}$ (٠، -٦)

و = (٠، ٠) ا (٢، ٠)

ب (س، ص)

مجموع عزوم القوى حول ب

$\overline{ب و}$ × $\overline{ق_1}$ + $\overline{ب ا}$ × $\overline{ق_2}$

($\overline{و}$ - $\overline{ب}$) × $\overline{ق_1}$ + ($\overline{ا}$ - $\overline{ب}$) × $\overline{ق_2}$

(-س، -ص) × (٠، ٦) + (٢-س، -ص) × (٠، -٦)

(-٦س) $\overline{ع}$ + (-١٢+٦س) $\overline{ع}$

~~(-٦س)~~ $\overline{ع}$ - (١٢) $\overline{ع}$ + ~~(٦س)~~ $\overline{ع}$

= -١٢ $\overline{ع}$

أى لا يعتمد على س، ص

⑥ اثرت القوى $\overline{ق_1}$ = ٢ $\overline{س}$ - ٤ $\overline{ص}$

$\overline{ق_2}$ = $\overline{س}$ - ٣ $\overline{ص}$

$\overline{ق_3}$ = -٣ $\overline{س}$ + ٧ $\overline{ص}$

فى النقط ا (-١، ١) ب (-٢، ٣) جـ (٠، ١) على الترتيب. برهن ان المجموعة تكافئ ازدواج و أوجد معيار عزمه

الحل

المحصلة $\overline{ح}$ = $\overline{ق_1}$ + $\overline{ق_2}$ + $\overline{ق_3}$ = $\overline{٠}$ ← ①

$\overline{جـ_و}$ = $\overline{و ا}$ × $\overline{ق_1}$ + $\overline{و ب}$ × $\overline{ق_2}$ + $\overline{و جـ}$ × $\overline{ق_3}$

$\overline{و ا}$ = $\overline{ا}$ - $\overline{و}$ = $\overline{ا}$ وهكذا نحصل على طول

$\overline{جـ_و}$ = (-١، ١) × (٢، -٤) + (-٢، ٣) × (١، -٣)

+ (٠، ١) × (-٣، ٧)

$\overline{جـ_و}$ = (٤-٢) $\overline{ع}$ + (٦-٣) $\overline{ع}$ + (٠+٣) $\overline{ع}$

$\overline{جـ_و}$ = ٨ $\overline{ع}$ ← ②

من ①، ②

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٨ وحدة عزم

⑦ فى الشكل المقابل مجموعة قوى مؤثرة على $\overline{ا د}$ تكون ازدواج القياس الجبرى لعزمه = -٧٥٠ نيوتن.سم أوجد قيمة ق، ك

الحل

نفرض $\overline{ى}$ متجه وحدة لأعلى

∴ ح = ق + ١٠ - ك - ١٥

∵ المجموعة تؤول لإزدواج ∴ $\overline{ح}$ = $\overline{٠}$

∴ ق - ك = ٥ ← ①

∵ القياس الجبرى لعزم الإزدواج = -٧٥٠ نيوتن.سم

∵ $ج_م = -٧٥$

∴ $-ق \times ٣ + ١٥ \times ٧ - ١٠ \times ١٢ = -٧٥$

$-٣ق = -٦٠$

∴ ق = ٢٠ نيوتن ، وبالمثل ك = ١٥ نيوتن

٨

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٣٦ سم ، ب جـ = ٢٨ سم ، هـ ∈ بَ جـَ ، و ∈ أ دَ بحيث ب هـ = ٣٦ سم ، د و = ٣٦ سم . أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ق ، ق ث . كجم فى اتجاهات أ ب ، جـ د ، ب جـ ، د أ ، هـ أ ، و جـ فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ ث . كجم . سم فى اتجاه جـ ب أ د أوجد ق

الحل

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواج

$ج_١ = -٥ \times ٨$

= − ٤٠ ث . كجم . سم

القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواج

$ج_٢ = -٧ \times ٦ = -٤٢$ ث . كجم . سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج

$ج_٣ = ق \times ٢ جا ٤٥ = \sqrt{٢}\, ق$

∵ $ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = ١٠$

$-٤٠ - ٤٢ + \sqrt{٢}\, ق = ١٠$

∴ $\sqrt{٢}\, ق = ٩٢$

∴ $ق = ٤٦\sqrt{٢}$ ث . كجم

٩

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٩ سم ، م ∈ بَ جـَ بحيث ب م = ٤ سم . أثرت قوى مقاديرها ق١ ، ١٠٧٨ ، ٢٦ ، ق٢ ، ١٨ نيوتن فى ب أ ، أ م ، م د ، د جـ ، د أ فإذا كانت المجموعة تتزن فأوجد ق١ ، ق٢

الحل

$م د = \sqrt{(م جـ)^٢ + (جـ د)^٢}$

∴ م د = ١٣ سم

وكذلك

$أ م = \sqrt{(١٢)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٠}٤$

∵ القوى فى د أ ، أ م ، م د فى اتجاه دورى واحد

، $\frac{١٨}{٩} = \frac{\sqrt{١٠}٧٨}{\sqrt{١٠}٤} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه الجبرى ($ج_١$)

حيث $ج_١ = ٢ \times$ مساحة Δ أ م د × −

$ج_١ = -٢ \times ٥٤ \times ٢ = -٢١٦$ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ (ق١ ، ق٢) تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه = ٢١٦ نيوتن . سم

$ق_١ = ق_٢ = ق$ ∴ $ق \times ٩ = ٢١٦$

∴ ق = ٢٤

∴ ق١ = ق٢ = ٢٤ نيوتن

عكس عقرب

مساحة Δ أ م د = مساحة ▭ − [مساحة Δ أ ب م + مساحة Δ م جـ د]

$= ١٢ \times ٩ - [\frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٢ + \frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢]$

= ٥٤ سم²

الوحدة السادسة
مركز الثقل

١ مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة في الفراغ يمر بها خط عمل وزن الجسم.

٢ مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لا يكون بالضرورة واقعاً على أحد جسيمات هذا الجسم.

٣ الجسم المنتظم الكثافة تكون تتناسب الكتلة مع الطول أو المساحة أو الحجم.

٤ مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً يقع على الخط المستقيم الرأسي المار بنقطة التعليق

٥ بإحداثيات نقطة تلاقي متوسطات المثلث = $\left(\frac{س_1+س_2+س_3}{3} ، \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3}\right)$

٦ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته

المسائل

١ في الشكل المقابل: أ ب جـ د سلك طوله ٣٢ سم فيه أب = ٢ ب جـ = ٢ جـ د = ١٦ سم فإنه بعد مركز ثقله عن $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ هو ....

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٤ ، ٤)
(جـ) (٣ ، ٥) (د) (٤ ، ٨)

٢ بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث = ... سم

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $4\sqrt{3}$
(جـ) ٦ (د) $6\sqrt{3}$

الشكل ده هيساعدك في المثلث المتساوي الأضلاع

طول ضلعه ل

أ د = $\frac{1}{2}$ ل

جـ د = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

مركز ثقله ($\frac{1}{2}$ ل ، $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل)

بعد مركز ثقله عن أحد رؤوس المثلث = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

③ أوجد مركز ثقل التوزيع الآتي:

و١ = ٢٠ نيوتن يؤثر في (٢، ١)
و٢ = ١٠ نيوتن ″ ″ (-٣، ١)
و٣ = ٢٥ ″ ″ ″ (١، -١)

الحل

ك	٢٠	١٠	٢٥	٦٠
س	٢	-٣	١	
ص	١	١	-١	

$$س = \frac{٢٠\times٢ - ١٠\times٣ + ٢٥}{٦٠} = \frac{١}{٣}$$

$$ص = \frac{٢٠ + ١٠ - ٢٥}{٦٠} = \frac{١}{٦}$$

∴ مركز الثقل هو $(\frac{١}{٣}، \frac{١}{٦})$

④ في الشكل المقابل مركز ثقل الصفيحة المظللة المنتظمة الكثافة

(أ) $(٢، \frac{٨}{٣})$ (ب) $(\frac{٨}{٣}، ٢)$
(جـ) (٦، ٨) (د) (٨، ٦)

نقطة تلاقي المتوسطات = $\frac{(٠،٠) + (٦،٠) + (٠،٨)}{٣}$

$= (\frac{٦}{٣}، \frac{٨}{٣}) = (٢، \frac{٨}{٣})$

⑤ أ ب جـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع ومنتظمة الكثافة كتلتها ٣ كجم، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢، ٢، ١١ كجم عند أ، ب، جـ على الترتيب

برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف م جـ

الحل

نفرض أن طول ضلع المثلث = ل

نقطة تلاقي متوسطاته م $(\frac{ل}{٢}، \frac{\sqrt{٣}ل}{٦})$

أ (٠، ٠) ب (ل، ٠) جـ $(\frac{ل}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢}ل)$

ملحوظة هـ = $(\frac{ل}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل)$ وسط بين م، جـ = $\frac{مجموعهم}{٢}$

ك	٣ (م)	٢ (أ)	٢ (ب)	١١ (جـ)	١٨
س	$\frac{ل}{٢}$	٠	ل	$\frac{ل}{٢}$	
ص	$\frac{\sqrt{٣}ل}{٦}$	٠	٠	$\frac{\sqrt{٣}ل}{٢}$	

$$س_م = \frac{٣\times\frac{ل}{٢} + ٢ل + ١١\times\frac{ل}{٢}}{١٨} = \frac{٩}{١٨}ل = \frac{ل}{٢}$$

$$ص_م = \frac{٣\times\frac{\sqrt{٣}}{٦}ل + ١١\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}ل}{١٨} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٨}ل = \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل$$

∴ مركز الثقل يؤثر في $(\frac{ل}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل)$ وهو نفس النقطة هـ منتصف م جـ ##

(٦) ثني قضيب منتظم أجـ طوله ١٠ ل من نقطة ب حيث أب = ٥ ل بحيث: ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠° وعلق القضيب من الطرف أ تعليقاً حراً فأثبت أن بـجـ يميل على الأفقي بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

الحل

نفرض أن هـ زاوية ميل بـجـ على الرأسي

الكتل	ك	٢ك	٣ك
س	٥ ل	٠	
ص	٠	٤٠ ل	

$$س_م = \frac{٢ك \times ٥ ل}{٣ك} = \frac{١٠}{٣} ل$$

$$ص_م = \frac{ك \times ٥ ل}{٣ك} = \frac{٥}{٦} ل$$

∴ مركز الثقل = $(\frac{١٠}{٣} ل ، \frac{٥}{٦} ل)$

زاوية الميل على الرأسي

$$ظا هـ = \frac{٥ ل - \frac{٥}{٦} ل}{\frac{١٠}{٣} ل} = \frac{٥}{٤}$$

∴ زاوية الميل على الأفقي ظا θ = $\frac{٤}{٥}$ #

(٧) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم أثرت الأوزان ٣ ، ٦ ، ٩ في أ ، ب ، جـ عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للنقطة جـ

الحل

	أ	ب	جـ	
الكتلة	٣	٦	٩	١٨
س	٥	١٠	٠	
ص	٥√٣	٠	٠	

$$س_م = \frac{٣ \times ٥ + ٦ \times ١٠}{١٨} = ٤\frac{١}{٦}$$

$$ص_م = \frac{٣ \times ٥√٣}{١٨} = \frac{٥√٣}{٦}$$

∴ مركز الثقل = $(٤\frac{١}{٦} ، \frac{٥√٣}{٦})$ بالنسبة لنقطة جـ

٨ إذا ثنيت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل △ أ ب جـ متساوي الأضلاع بخط مستقيم على أحد أحرفها (أ ب) بنسبة ١ : ٢ من جهة جـ فإنه زاوية ميل هذا الحرف على الرأسي = ...

(أ) ٢٢,٥° (ب) ٣٠°
(جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

٩ في الشكل المقابل: صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جم على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم. ألصقت كتلة ١٠٠ جم في نقطة تثليث أ ب كما بالرسم. عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين أ س، أ ص

الحل

ملحوظة: مركز ثقل المثلث المتساوي الأضلاع $= (\frac{1}{2}ل ، \frac{\sqrt{3}}{6}ل) = (٦ ، ٢\sqrt{٣})$

هـ (٤ ، ٠) لأن $\frac{١٢}{٣} = ٤$

ك	٣٠٠	١٠٠	٤٠٠
س	٦	٤	
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠	

$$سم = \frac{س_١ك_١ + س_٢ك_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٦ \times ٣٠٠ + ٤ \times ١٠٠}{٤٠٠}$$

$$= ٥,٥$$

$$صم = \frac{٣٠٠ \times ٢\sqrt{٣} + ٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$$

∴ مركز الثقل = $(٥,٥ ، \frac{٣}{٢}\sqrt{٣})$

١٠ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ د فيه: أ ب = ٦ سم، ب جـ = ١٠ سم، هـ ∈ أ د بحيث أ هـ = ٦ سم. ثني المثلث أ ب هـ حول الضلع ب هـ حتى انطبق أ ب على ب جـ تماماً. عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$.

الحل

مساحة المستطيل ن جـ د
$= ٤ \times ٦ = ٢٤$ سم²
ومركزه = (٢ ، ٣)

مساحة المثلثين المنطبقين في ب ن هـ
$= ٢ \times \frac{1}{2} \times ٦ \times ٦ = ٣٦$ سم²

ومركزهما $(\frac{٤ + ١٠ + ٤}{٣} ، \frac{٦ + ٠ + ٠}{٣}) = (٦ ، ٢)$

النسبة بين المساحتين = النسبة بين الكتلتين

$٣٦ : ٢٤ = ٣ك : ٢ك$

↑ المثلثين ↑ المستطيل

الشكل	المستطيل	المثلث	
الكتلة	٢ك	٣ك	٥ك
س	٢	٦	
ص	٣	٢	

$$س_م = \frac{٢×٢ك + ٣×٦ك}{٥ك} = \frac{٢٢}{٥} = ٤,٤ \text{ سم}$$

$$ص_م = \frac{٣×٢ك + ٢×٣ك}{٥ك} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤ \text{ سم}$$

∴ مركز الثقل (٤,٤ ، ٢,٤)

(١١) علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها و تعليقاً حراً من الرأس أ وثبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$ و . أثبت أن زاوية ميل القطر $\overline{أجـ}$ على الرأسي في وضع الاتزان = $\frac{١}{٥}$

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع ل

وطول قطره = $\sqrt{٢}$ ل

هـ نقطة الأصل (٠،٠) وفيها مركز ثقل المربع

هـ ب = نصف قطر = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل

	المربع	الجسم	
الكتلة	و	$\frac{١}{٤}$ و	$\frac{٥}{٤}$ و
س	٠	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل	
ص	٠	٠	

$$س_م = \frac{٠ + \frac{١}{٤} و × \frac{\sqrt{٢}}{٢} ل}{\frac{٥}{٤} و} = \frac{\sqrt{٢}}{١٠} ل$$

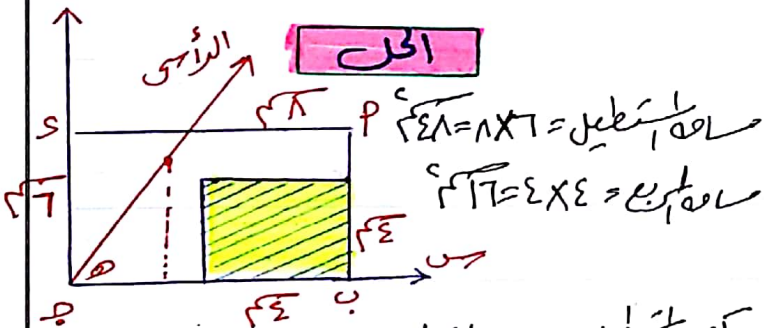
$$ص_م = ٠$$

$$∴ ظاهـ = \frac{\sqrt{٢}}{١٠} ل ÷ \frac{\sqrt{٢}}{٢} ل = \frac{١}{٥} \quad \#$$

(١٢) صفيحة رقيقة على شكل مستطيل أ ب جـ د الذي فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، قطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم . أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ ثم إذا علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من الرأس جـ ، فأوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{ب جـ}$ على الرأسي .

الحل

مساحة المستطيل = ٦ × ٨ = ٤٨ سم²

مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ سم²

$$\frac{\text{كتلة المستطيل}}{\text{كتلة المربع}} = \frac{\text{مساحة المستطيل}}{\text{مساحة المربع}} = \frac{٤٨}{١٦} = \frac{٣}{١}$$

ك	المستطيل	المربع	
ك	٣ك	−ك	٢ك
س	٤	٦	
ص	٣	٢	

$$س_م = \frac{١٢ك - ٦ك}{٢ك} = ٣$$

$$ص_م = \frac{٩ك - ٢ك}{٢ك} = ٣,٥$$

المركز = (٣ ، ٣,٥)

$$ظاهـ = \frac{ص}{س} = \frac{٣,٥}{٣} = \frac{٧}{٦}$$

١٣) ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء منتصف بجـ ثبت الكتل ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ عند ا ، ب ، ء ، جـ ، م
عين مركز ثقل المجموعة . وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية .

الحل

الكتل	٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥	٢١٠
	جـ	ء	ب	ا	م	
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠	
ص	٠	٠	٠	١٠√٣	١٠√٣ / ٣	

س م = (٧٥×١٠ + ٣٠×٢٠ + ١٥×١٠ + ٤٥×١٠) / ٢١٠

س م = ٦٥ / ٧

ص م = (١٥×١٠√٣ + ٤٥×١٠√٣ / ٣) / ٢١٠ = ١٠√٣ / ٧

∴ مركز الثقل = (٦٥ / ٧ ، ١٠√٣ / ٧) من نقطة "جـ"

بعد رفع الكتلة عند ب

ك	٢١٠	−٣٠	١٨٠
س	٦٥ / ٧	٢٠	
ص	١٠√٣ / ٧	٠	

س ن = (٦٥ / ٧ × ٢١٠ − ٣٠ × ٢٠) / ١٨٠ = ١٥ / ٢

ص ن = (١٠√٣ / ٧ × ٢١٠) / ١٨٠ = ٥√٣ / ٣

∴ مركز الثقل الجديد = (١٥ / ٢ ، ٥√٣ / ٣) من نقطة "جـ"

١٤) ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم وضعت أربع كتل متساوية في المقدار عند رؤوسه.

ا) عين مركز ثقل المجموعة .

ب) إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

الحل

ا) ∵ الكتل الاربع متساوية في المقدار
∴ مركز الثقل يؤثر في المركز الهندسي للمربع (١٠ ، ١٠)

ب) عند رفع أحد الكتل ولتكن جـ مثلاً
∴ مركز ثقل الجزء الباقي يقع عند نقطة تلاقي متوسطات △ ء ا ب وهو (٢٠ / ٣ ، ٢٠ / ٣)

(١٥) صفيحة منتظمة على شكل مربع ا ب جـ د طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائري طول نصف قطره ٢ سم ويبعد مركزه ٣ سم عن ا ب ، ب جـ . عين بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن جـ د ، ا د $(\pi = \frac{22}{7})$

الحل

المربع مساحته $8 \times 8 = 64$ سم²

مركزه (٤ ، ٤)

القرص الدائري مساحته = π نق² = $\frac{22}{7} \times 4 = \frac{88}{7}$

مركزه = (٥ ، ٥)

كتلة المربع : القرص

$64 : \frac{88}{7} = 56 : 11$

ك	٥٦ ك	- ١١ ك	٤٥ ك
س	٤	٥	
ص	٤	٥	

(المربع ، الدائرة)

$$س_م = \frac{56ك \times 4 - 11ك \times 5}{45ك} = \frac{169}{45}$$

$$ص_م = \frac{56ك \times 4 - 11ك \times 5}{45ك} = \frac{169}{45}$$

∴ مركز الثقل الجديد $\left(\frac{169}{45} ، \frac{169}{45}\right)$

(١٦) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل Δ ا ب جـ المتساوي الساقين حيث ا ب = ا جـ = ٢٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم . رسم $\overline{اد} \perp \overline{بجـ}$ ويقطع $\overline{بجـ}$ في د ، فإذا كانت هـ منتصف $\overline{اد}$ وفصل Δ هـ ب جـ أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن هـ

الحل

اد = ٢٤ سم فيثاغورث

مساحة Δ هـ ب جـ : مساحة Δ ا ب جـ

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 12 : \frac{1}{2} \times 20 \times 24$

$= 1 : 2$

لاحظ أن د نقطة الأصل

مركز ثقل Δ ا ب جـ = $\left(0 ، \frac{24}{3}\right) = (0 ، 8)$

مركز ثقل Δ هـ ب جـ = $\left(0 ، \frac{12}{3}\right) = (0 ، 4)$

الكتلة	٢ ك	- ك	ك
س	٠	٠	
ص	٨	٤	

$س_م = 0$

$$ص_م = \frac{16ك - 4ك}{ك} = 12$$

∴ مركز الثقل (٠ ، ١٢)

وهو نفسه نقطة هـ (٠ ، ١٢)

∴ بعد مركز الثقل عن هـ = صفر

هانت يا أبطال

(١٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ م ووزنه ٥ نيوتن ، جـ ، ء نقطتا تثليثه من جهة أ علق أوزان مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ عند أ ، جـ ، ء ، ب عين مركز ثقل المجموعة .

الحل

نفرض أن مركز ثقل المجموعة يبعد مسافة س متراً عن أ

∵ عزم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

$$\therefore\ ٢ \times \frac{٢}{٣} + ٥ \times ١ + ٣ \times \frac{٤}{٣} + ٤ \times ٢ = ١٥ \times س$$

$$\frac{٥٥}{٣} = ١٥\, س$$

$$\therefore\ س = \frac{٥٥}{٣} \div ١٥ = \frac{١١}{٩} \text{ م}$$

∴ مركز الثقل يبعد مسافة $\frac{١١}{٩}$ متر عن أ

(١٨) مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ كجم ، ٦ كجم والمسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ كجم مسافة ..... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥٪ (د) ٩

③ ——— ١٥ سم ——— ⑥

(٠ ، ٠) (١٥ ، ٠)

$$س_م = \frac{٦ \times ١٥ + ٣ \times ٠}{٦ + ٣} = ١٠$$

$ص_م = ٠$ (١٠ ، ٠)

يبعد ١٠ سم عن الكتلة ٣ كجم

تم بحمد الله وتوفيقه الانتهاء من مادة الاستاتيكا

اللهم اجعله خالصاً لوجهك الكريم

اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا